

Конспект лекций по волновой оптике
для студентов 2 курса ИФИТ ДВГУ

Константин Ю. Казаков,

Дальневосточный государственный университет, г. Владивосток

13 февраля 2008 г.

Содержание

1	Лекция №1 "Электромагнитные волны"	5
1.1	Система уравнений Максвелла	5
1.2	Волновое уравнение	6
1.3	Плоские волны	9
1.3.1	Фазовая скорость	11
1.4	Комплексная форма записи плоской волны	11
1.5	Вопросы для самостоятельной работы	12
2	Лекция №2 "Отражение и преломление света"	13
2.1	Вывод законов отражения и преломления света	13
2.2	Явление полного отражения света	16
2.3	Вопросы для самостоятельной работы	19
3	Лекция №3 "Формулы Френеля"	20
3.1	Вывод формул	20
3.2	Анализ формул Френеля	23
3.3	Вопросы для самостоятельной работы	25
4	Лекция №4 "Энергия и интенсивность света"	27
4.1	Закон сохранения энергии для ЭМ поля	27
4.2	Интенсивность света	29
4.3	Коэффициенты отражения и пропускания	30
4.4	Вопросы для самостоятельной работы	32
5	Лекция №5 "Интерференция монохроматического света"	35
5.1	Определение интерференции	35
5.2	Интерференция монохроматических волн	35
5.3	Когерентность волн	38
5.4	Интерференция, осуществляемая делением волнового фронта	38
5.5	Вопросы для самостоятельной работы	41
6	Лекция №6 "Пространственная когерентность"	42
6.1	Введение	42
6.2	Расчет видности	42
6.3	Критерий пространственной когерентности	45
6.3.1	Ширина и угол пространственной когерентности	46
6.4	Вопросы для самостоятельной работы	47
7	Лекция №7 "Интерференция квазимонохроматического света"	49
7.1	Интерференция, осуществляемая делением амплитуды	49
7.2	Время и длина когерентности	51
7.3	Квазимонохроматический свет	52
7.4	Условие временной когерентности	53
7.5	Вопросы для самостоятельной работы	54

8	Лекция №8 "Принцип Гюйгенса–Френеля"	55
8.1	Формулировка принципа	55
8.2	Вычисление амплитуды волны	58
8.3	Примеры	60
8.4	Вопросы для самостоятельной работы	61
9	Лекция №9 "Дифракция Френеля круглом отверстии"	62
9.1	Спираль Френеля	62
9.2	Дифракция на круглом отверстии	64
9.3	Зонная пластинка	66
9.4	Вопросы для самостоятельной работы	67
10	Лекция №10 "Дифракция Френеля на прямолинейном крае"	68
10.1	Зоны Шустера и спираль Корню	68
10.2	Дифракция на прямолинейном крае	71
10.3	Условие наблюдения дифракции Френеля	74
10.4	Вопросы для самостоятельной работы	76
11	Лекция №11 "Дифракция Фраунгофера на прямоугольной щели"	77
11.1	Постановка задачи	77
11.2	Область дифракции Фраунгофера	79
11.3	Расчет распределения интенсивности	80
11.4	Вопросы для самостоятельной работы	84
12	Лекция №12 "Дифракционная решетка"	85
12.1	Расчет распределения интенсивности	86
12.2	Условие максимумов и минимумов	87
12.3	Спектроскопические характеристики решетки	89
12.3.1	Разрешающая способность	89
12.3.2	Угловая дисперсия и область дисперсии	90
12.4	Вопросы для самостоятельной работы	91
13	Лекция №13 "Металлооптика"	93
13.1	Уравнения Максвелла в проводящей среде	93
13.2	Глубина проникновения, фазовая скорость и длина волны	96
13.3	Микроскопическая теория оптических свойств металлов	97
13.4	Вопросы для самостоятельной работы	99
14	Лекция №14 "Дисперсия и абсорбция света"	100
14.1	Основы электронной теории дисперсии	100
14.1.1	Уравнение колебаний оптического электрона	101
14.1.2	Электронная и ионная дисперсия	102
14.1.3	Область нормальной дисперсии	103
14.1.4	Область аномальной дисперсии	104
14.2	Законы поглощения света	104
14.2.1	Закон Бугера	104
14.2.2	Закон Бугера–Ламберта–Бера	105
14.3	Вопросы для самостоятельной работы	106
15	Экзаменационные вопросы	107

Оптика — раздел физики, в котором изучается оптическое излучение (свет), его распространение и физические явления, наблюдающиеся при его взаимодействии с веществом.

Оптическое излучение — электромагнитные (ЭМ) волны с длиной волны от единиц нм до десятых долей мм. К оптическому излучению, помимо видимого света (400 ÷ 760 нм), воспринимаемого глазом, относятся инфракрасные (1 мм ÷ 760 нм) и ультрафиолетовые волны (10 ÷ 400 нм).

1 Лекция №1 "Электромагнитные волны"

Система уравнений Максвелла. Волновое уравнение и скорость света. Плоские волны. Фазовая скорость. Вопросы для самостоятельной работы.

Цель первой лекции — вывести волновое уравнение для напряженности электрического и магнитного поля с помощью уравнений Максвелла, рассмотреть основные свойства ЭМ волн; познакомиться с математическим аппаратом представления плоских ЭМ волн в комплексной форме.

1.1 Система уравнений Максвелла

Электромагнитное поле в вакууме описывается двумя векторами **E** и **H**, которые, соответственно, называются напряженностью электрического и магнитного полей. Эти векторы являются *основными*, так как для описания влияния ЭМ поля на материальные объекты необходимо *дополнительно* ввести векторы плотности электрического тока **j**, смещения **D** и индукции магнитного поля **B**.

В самом общем случае, когда поле изменяется от точки к точке в пространстве и переменное во времени, векторы **E** и **H** будут зависеть от пространственных координат (x, y, z) и времени t .

Уравнения Максвелла, Джеймс Кларк Максвелл (1831–1879), связывают между собой эти пять векторных величин системой дифференциальных уравнений. Совместно эти уравнения описывают эволюцию ЭМ поля, выражая в математической форме фундаментальные законы электричества и магнетизма (система СИ)

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} &= \mathbf{j}, && \text{обобщенный закон Био–Савара–Лапласа,} \\
 \text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0, && \text{закон ЭМ индукции Фарадея,} \\
 \text{div } \mathbf{D} &= \rho, && \text{закон Гаусса для эл. поля,} \\
 \text{div } \mathbf{B} &= 0, && \text{закон Гаусса для магн. поля,}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где ρ обозначает объемную плотность электрических зарядов; точка на вектором обозначает операции дифференцирования по времени; знаки "rot" и "div" обозначают операции векторного анализа — ротора и дивергенции.

Если ввести дифференциальный оператор "набла"

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),
 \tag{2}$$

то ротор и дивергенция в декартовой системе координат представляется в следующем виде

$$(3) \quad \text{rot } \mathbf{H}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} \equiv [\nabla, \mathbf{H}(x, y, z)],$$

$$(4) \quad \text{div } \mathbf{D}(x, y, z) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \equiv (\nabla, \mathbf{D}(x, y, z)),$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ обозначают орты декартовой системы координат.

Первое уравнение Максвелла является обобщением на случай переменного магнитного поля закона Био–Савара–Лапласа, т. е. показывает как вектор напряженности магнитного поля зависит от плотности тока проводимости и плотности тока смещения. Второе уравнение представляет собой закон ЭМ индукции Фарадея. Третье уравнение выражает тот факт, что у магнитного поля нет других источников, кроме электрического тока. Четвертое уравнение является следствием закона Кулона и принципа суперпозиции полей.

Система из четырех уравнений Максвелла (1), связывая между собой пять векторных физических величин

$$\mathbf{E}, \quad \mathbf{H}, \quad \mathbf{V}, \quad \mathbf{D} \quad \text{и} \quad \mathbf{j},$$

не является замкнутой. Для того чтобы эти уравнения при заданных распределениях \mathbf{j} и ρ допускали единственное решение для векторов поля, необходимо добавить **материальные уравнения**, которые описывают "отклик" материальной среды на действие ЭМ поля.

Для физически изотропной среды (т.е. когда ее свойства в каждой точке не зависят от направления) материальные уравнения имеют линейную форму

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}, & \text{закон Ома в дифференциальной форме,} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{V} &= \mu_0 \mu \mathbf{H}, \end{aligned}$$

где ε_0 и μ_0 — соответственно **электрическая и магнитные постоянные**¹, $\varepsilon(x, y, z)$ и $\mu(x, y, z)$ — относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, а σ — ее удельная проводимость.

Большая часть курса будет посвящена распространению света в среде, в которой не происходит его заметное ослабление. Такая среда называется **прозрачной**. Она должна быть непроводящей, т. е. $\sigma = 0$.

1.2 Волновое уравнение

Рассмотрим ЭМ поле там, где нет сторонних эл. зарядов и токов, т. е. $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Первое и второе уравнения Максвелла примут вид

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} &= 0, & \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{V}} &= 0, & \mathbf{V} &= \mu_0 \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

¹По современным данным: $\varepsilon_0 = 8,85418782 \times 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1,2566370614 \times 10^{-6}$ Гн/м

Покажем, что векторы электрич. и магн. полей удовлетворяют волновому уравнению. Дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять вектор напряженности электрич. или магн. полей в отдельности, получаются путем исключения. Для среды с постоянной магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$ найдем с использованием соотношения векторной алгебры

$$(7) \quad \text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

В результате найдем, что

$$(8) \quad \Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \ddot{\mathbf{E}} - \text{grad div } \mathbf{E} = 0,$$

Материальное уравнения для \mathbf{D} дает

$$(9) \quad \varepsilon \text{div } \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \text{grad } \varepsilon = 0.$$

Тогда уравнение (8) можно записать так

$$(10) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \text{grad}(\mathbf{E} \cdot \text{grad } \ln \varepsilon) = 0,$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 299,792.458$ км/с — скорость света в вакууме.

Аналогично можно получить уравнения для вектора \mathbf{H}

$$(11) \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} + (\text{grad } \ln \varepsilon) \times \text{rot } \mathbf{H} = 0.$$

Для однородного диэлектрика, $\text{grad } \ln \varepsilon = 0$, уравнения (10) и (11) преобразуются к стандартным уравнения волнового движения полей

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно из уравнений Максвелла следует теоретическая возможность существования волн ЭМ природы, распространяющихся со скоростью

$$(13) \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Развивая ЭМ теорию света Дж. Максвелла, Генрихом Рудольфом Герцем (1857–1894) в 1886–1889 экспериментально показал, что ЭМ волны ведут себя аналогично световым. При этом для генерации ЭМ волн он сконструировал специальный вибратор, а регистрировал их с помощью резонатора. Пользуясь этими устройствами, Герц 1) доказал существование электромагнитных волн, наблюдал их отражение, преломление, интерференцию; 2) подтвердил следующий из теории Максвелла вывод о том, что скорость распространения электромагнитных волн в воздухе равна скорости света.

Термин "скорость распространения ЭМ волны" имеет однозначный физический смысл лишь для волн простого вида, например монохроматических волн. Поэтому скорость в формуле (13) не определяет однозначно скорость распространения произвольного решения (12), например суперпозиции нескольких монохроматических волн.

	n (желтая линия)	$\sqrt{\varepsilon}$
Воздух	1.000294	1.000295
Водород H_2	1.000138	1.000132
Углекислый газ CO_2	1.000449	1.000473
Угарный газ CO	1.000340	1.000345

Таблица 1: Абсолютные показатели преломления и статические диэлектрические постоянные некоторых газов (по Л. Больцману)

Значение скорости v , как правило, определяется косвенно по отношению к скорости света c . Согласно закону преломления для плоской волны, падающей на границу двух однородных сред,

$$(14) \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2},$$

где θ_i и θ_t – угол падения и преломления соответственно, а v_1 и v_2 – скорость волны в первой и второй среде. Отношение скоростей обозначается как n_{12} – **относительный показатель преломления** для преломления света из первой среды во вторую. **Абсолютный показатель преломления** каждой среды определяется при падении света на среду из вакуума

$$(15) \quad n = \frac{c}{v}.$$

Обозначая абсолютные показатели преломления двух сред как n_1 и n_2 , найдем

$$(16) \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Сопоставив формулы (13) и (16), получим формулу Максвелла

$$(17) \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Для того чтобы найти значение абсолютного показателя преломления среды n необходимо знать диэлектрическую и магнитную проницаемость среды. Для большинства прозрачных сред в оптической области диапазона ЭМ волн $\mu \cong 1$, поэтому

$$(18) \quad n \cong \sqrt{\varepsilon}.$$

Эта формула, полагая что ε есть диэлектрическая постоянная среды, дает верное значение для показателя преломления среды с низкой дисперсией (газы). Для твердых тел и некоторых жидкостей между значениями, получаемым из формулы Максвелла и эксперимента, находится существенное расхождение, см. Таблицы 1 и 2². В этом случае необходимо учесть дисперсию, т. е. зависимость ε от частоты ЭМ поля.

²Значения для показателя преломления n веществ приведены для желто-оранжевой линии $\lambda_D = 5893 \text{ \AA}$ в спектре излучения паров натрия.

	n(желтая линия)	$\sqrt{\varepsilon}$
Бензол C_6H_6	1.482	1.489
Метиловый спирт CH_3	1.34	5.7
Этиловый спирт C_2H_5OH	1.36	5.0
Вода H_2O	1.33	9.0

Таблица 2: Абсолютные показатели преломления и статические диэлектрические постоянные некоторых жидкостей

1.3 Плоские волны

Простейшее решение волновых уравнений (10) и (11) – это **монохроматическая плоская волна**. Колебания напряженностей эл. и магн. полей происходят по гармоническому закону

$$(19) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}}{v} \right) \right]$$

$$(20) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}}{v} \right) \right],$$

где \mathbf{N} – единичный вектор, задающий направление распространения волны, $\mathbf{r}(x, y, z)$ – радиус-вектора точки P в пространстве, в которую пришла волна; \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 – амплитуды волны (постоянные величины).

Левая часть уравнений (19) остается неизменной при замене $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{N} \cdot \mathbf{r} + \lambda$, где

$$(21) \quad \lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = vT = \frac{v}{\nu}.$$

Здесь λ называется **длиной волны**, T – **периодом колебаний** и ν – **частотой волны**. Длина волны λ_0 той же частоты, но распространяющейся в вакууме, равна

$$(22) \quad \lambda_0 = cT = n\lambda.$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$ характеризуют быстроту изменения фазы волны с течением времени. Для характеристики быстроты изменения фазы с расстоянием вводят **волновое число**

$$(23) \quad \kappa = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\nu}{c}.$$

Удобно определить векторы \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 в направлении \mathbf{N} , длина которых равна

$$(24) \quad |\mathbf{k}_0| = 2\pi\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$$

и

$$(25) \quad |\mathbf{k}| = n|\mathbf{k}_0| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}.$$

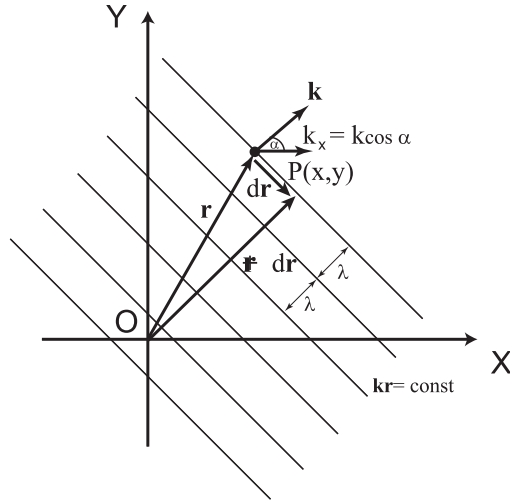


Рис. 1: Плоская волна. Волновой фронт перпендикулярен плоскости XY .

Вектор $\mathbf{k} = k\mathbf{N}$ называется **волновым вектором** в данной среде, а $\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{N}$ – волновым вектором в вакууме.

Аргумент гармонической волны (19) называется **фазой**

$$(26) \quad \varphi(t, \mathbf{r}) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

В некоторый момент времени $t = t_0$ точки пространства, имеющие одинаковое значение φ , образуют поверхность равной фазы, называемую **волновым фронтом**:

$$(27) \quad \begin{aligned} \Delta\varphi &= \omega\Delta t - \mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r}, \\ \Delta\varphi &= 0 - \mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r}, && \text{в данный момент времени,} \\ \Delta\varphi &= 0, && \text{в случае когда } \Delta\mathbf{r} \text{ перпендикулярно } \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Значение фазы будет постоянно, т. е. $\Delta\varphi = 0$, во всех точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны \mathbf{N} . Поэтому монохроматическую волну (19) называют **плоской**.

Волновые поверхности (поверхности одинакового значения напряженности поля) представляют собой плоскости, перпендикулярные вектору \mathbf{k} . Уравнение волновой поверхности имеет следующий вид

$$(28) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{const},$$

где $k_{x,y,z}$ – проекции волнового вектора, которые определяют скорость распространения фазы в направлении координатных осей XYZ соответственно. С физической точки зрения волновое число k представляет собой число радиан фазы на единицу смещения вдоль направления распространения волны \mathbf{N} . Величина k_x соответствует числу радиан, отнесенному к единицы смещения вдоль положительного направления оси X . Аналогичный смысл имеют k_y и k_z . Если продвинувшись на расстояние длины волны λ вдоль \mathbf{N} , то фазы волны возрастет на 2π радиан. Если перемещение происходит

вдоль оси X , что чтобы фаза волны увеличилась на 2π радиан, надо пройти расстояние $\lambda/\cos\alpha$, где α — направляющий косинус. Таким образом, увеличение фазы на единицу длины оси X меньше чем волновое число k в $\cos\alpha$ раз. Так и должно быть, поскольку проекция вектора \mathbf{k} на направление \mathbf{e}_x (т. е. $k_x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x$) всегда меньше длины вектора в отношении, определяемом косинусом соответствующего угла.

1.3.1 Фазовая скорость

Фазовая скорость определяется как отношение $\frac{|d\mathbf{r}|}{dt}$ при $\varphi = \text{const}$, т. е.

$$(29) \quad d\varphi = \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad v_{ph} = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Соответственно скорость v в уравнении (19) называется фазовой, т. е. скорость перемещения волновой поверхности

$$(30) \quad v \equiv v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

В некоторых случаях фазовая скорость ЭМ волны, попавшей в вещество, может оказаться больше чем скорость света c . Для плоской волны это произойдет когда $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ будет меньше единицы (случай аномальной дисперсии). Согласно специальной теории относительности скорость перемещения физической материи и скорость передачи информации (сигнал) не могут превышать скорости света в вакууме (максимальная скорость). Это означает, что фазовая скорость не соответствует скорости, с которой распространяется сигнал. Это связано с тем, что плоская монохроматическая волна является физической абстракцией (волна бесконечно протяженная в во времен и пространстве) никогда не реализующейся на практике. В линейных средах, где соблюдается **принцип суперпозиции**, физические волны, локализованные в пространстве — группа или пучок волн, представляют собой суперпозицию монохроматических волн. Скорость распространения пучка волн, **групповая скорость**, в веществе, не обладающем сильной дисперсией, соответствует скорости распространения энергии волны.

1.4 Комплексная форма записи плоской волны

Принимая во внимание формулу Эйлера

$$(31) \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

при работе с плоскими волнами удобно пользоваться комплексной формой записи

$$(32) \quad \mathbf{E} = \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 e^{i\varphi} + \mathbf{E}_0^* e^{-i\varphi}],$$

$$(33) \quad \mathbf{H} = \Re \{ \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0 e^{i\varphi} + \mathbf{H}_0^* e^{-i\varphi}],$$

где \Re обозначает реальную часть комплексной экспоненты, а амплитуда может быть комплексной функцией, содержащая информацию о начальной

фазе. При работе с уравнениями линейными относительно \mathbf{E} и \mathbf{H} , символ \Re можно отбросить и работать непосредственно с комплексной функцией. В конечных выражениях только реальная часть будет иметь физический смысл. Однако при работе выражениями квадратичными по полям (энергия, поток) необходимо вычислять сперва реальную часть прежде чем делать вычисления.

Комплексная форма записи удобна для дифференцирования как по времени, так и по координате. Например

$$(34) \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i[\mathbf{k}, \mathbf{H}], \quad \dot{\mathbf{H}} = i\omega\mathbf{H}.$$

Тогда система уравнений Максвелла (1) в однородном незаряженном диэлектрике сводится к системе алгебраических уравнений вида

$$(35) \quad [\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \omega\mu_0\mu\mathbf{H}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{H}] = -\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}.$$

Умножая обо уравнения на \mathbf{k} , получим

$$(36) \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Это соотношение выражает условие **поперечности ЭМ волны**, т. е. векторы эл. и магн. полей лежат в плоскостях перпендикулярных направлению распространения волны. Из (35), что векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов. Кроме этого

$$(37) \quad \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} |\mathbf{E}| = \sqrt{\mu_0\mu} |\mathbf{H}|.$$

1.5 Вопросы для самостоятельной работы

1. Записать систему уравнений Максвелла (1) и материальные уравнения (5) в гауссовой системе единиц.
2. Запишите систему уравнений Максвелла (1) в интегральном виде.
3. Используя первое и второе уравнения Максвелла, выведите закон сохранения заряда в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0.$$

Используя теорему Гаусса запишите это соотношение в интегральной форме.

4. Доказать, что если среда является прозрачной, то она – непроводящая.
5. Вывести волновое уравнение для вектора магнитной напряженности ЭМ поля (10) и (11).
6. Почему бессмысленно вводить вектор длины волны λ ?
7. Выведите условие совместности (или дисперсионное соотношение)

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2.$$

уравнений (35), полагая \mathbf{k} произвольным (реальным или комплексным) вектором, направленным перпендикулярно \mathbf{E} и \mathbf{H} .

2 Лекция №2 "Отражение и преломление света"

*Вывод законов отражения и преломления света.
Явление полного отражения света.*

Цель настоящей лекции – вывести законы отражения и преломления света на основе уравнений Максвелла. Идея заключается в том, что поведение ЭМ на границе полностью определяется граничными условиями для векторов электрич. и магн. поля волны.

2.1 Вывод законов отражения и преломления света

Когда плоская волна падает на идеально гладкую границу³ двух однородных сред с различными оптическими свойствами, происходит ее расщепление на две волны: **преломленную** и **отраженную**, распространяющиеся во второй и первой среде, соответственно, в направлении от границы раздела. Факт существования отраженной и преломленной волн следует из граничных условий, которым должны удовлетворять векторы ЭМ поля на границе раздела. Мы наивно предположим, что эти волны также являются плоскими, и выведем соотношения между направлениями их распространения.

Итак, на гладкую границу раздела двух незаряженных однородных диэлектриков (проницаемости $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и $\varepsilon_1 = n_1^2$ и $\varepsilon_2 = n_2^2$) падает плоская монохроматическая волна. Пусть поверхность раздела – плоскость XU ; ось X – линия пересечения поверхности раздела с плоскостью падения XZ ; ось Z направлена перпендикулярно к плоскости падения, см. рис. 2

$$(38) \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{A}_i \exp[i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B}_i = \frac{[\mathbf{k}_i, \mathbf{E}_i]}{\omega_i},$$

$$(39) \quad \mathbf{E}_r = \mathbf{A}_r \exp[i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B}_r = \frac{[\mathbf{k}_r, \mathbf{E}_r]}{\omega_r},$$

$$(40) \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{A}_t \exp[i(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B}_t = \frac{[\mathbf{k}_t, \mathbf{E}_t]}{\omega_t},$$

где индексы i (ncident), r (eflected) и t (ransmitted) относятся к падающей, отраженной и преломленной волне; \mathbf{A} – амплитуда, ω – циклическая частота \mathbf{k} – волновой вектор

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathbf{k}_i^2 &= \frac{\omega_i^2 n_1^2}{c^2}, & k_{ix} &= |\mathbf{k}_i| \sin \theta_i, & k_{iy} &= 0, & k_{iz} &= |\mathbf{k}_i| \cos \theta_i, \\ \mathbf{k}_r^2 &= \frac{\omega_r^2 n_1^2}{c^2}, & k_{rx} &= |\mathbf{k}_r| \sin \theta_r, & k_{ry} &= 0, & k_{rz} &= -|\mathbf{k}_r| \cos \theta_r, \\ \mathbf{k}_t^2 &= \frac{\omega_t^2 n_2^2}{c^2}, & k_{tx} &= |\mathbf{k}_t| \sin \theta_t, & k_{ty} &= 0, & k_{tz} &= |\mathbf{k}_t| \cos \theta_t. \end{aligned}$$

³Все полученные ниже формулы справедливы при условии, что при переходе через плоскую поверхность раздела двух сред показатель преломления скачкообразно изменяется от значения n_1 до значения n_2 на расстоянии меньше длины волны, т. е. порядка нескольких десятком микрометров.

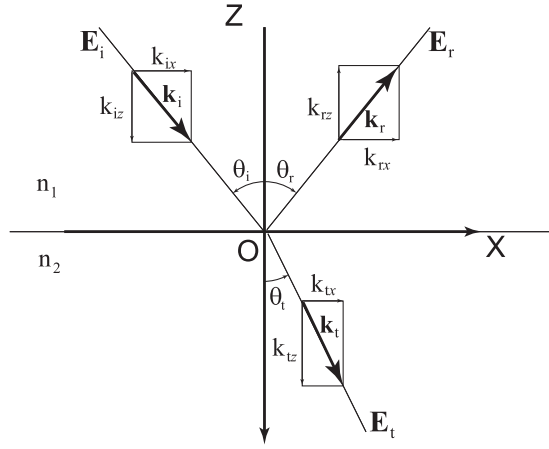


Рис. 2: Отражение и преломление волн на поверхности. Волновые векторы для падающей \mathbf{k} , отраженной \mathbf{k}_r и преломленной \mathbf{k}_t волн лежат в плоскости падения XZ .

Здесь θ_i – угол падения, θ_r – угол отражения, θ_t – угол преломления.

Для вывода законов отражения и преломления света на потребуются выразить параметры преломленной и отраженной волн через параметры падающей. Это можно сделать при помощи граничных условий, вытекающих из уравнений Максвелла, которые справедливы не только для однородной среды, но на границе между двумя материалами. Именно уравнения Максвелла требуют, чтобы три волны были согласовались друг с другом надлежащим образом.

Первое граничное условие, которое следует из закона Фарадея, можно записать для вектора напряженности электрического поля в следующем виде

$$(42) \quad \mathbf{E}_{2\tau} = \mathbf{E}_{1\tau},$$

т. е.

тангенциальная компонента вектора напряженности эл. поля по обе стороны границы раздела одинаковая.

В нашем случае $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$, а $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$. Применяя условие (42) для выбранной системы координат, получим

$$(43) \quad \begin{aligned} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)_y &= \mathbf{E}_y, \\ (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)_z &= \mathbf{E}_z. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать из (43), что **постоянство частоты волны при отражении и преломлении**

$$(44) \quad \omega_r = \omega_t = \omega_i \equiv \omega.$$

Нестрогое доказательство следует из того факта, что отраженная и преломленная – это вторичные волны, возникающие в результате вынужденных

колебаний электронов среды под действием поля падающей (первичной) волны. Таким образом, на границе раздела временная зависимость фазы вторичных волн и первичной волны одинаковая.

Из (43) и (44) также следует, что в плоскости падения XU на границе $z = 0$ должны совпадать фазы трех волн (38)

$$(45) \quad \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}.$$

Отсюда следует, что

волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости.

Выписывая явно компоненты, получим

$$(46) \quad xk_{ix} + zk_{iz} = xk_{rx} + zk_{rz} = xk_{tx} + zk_{tz}.$$

Поскольку уравнение (46) выполняется в любой точке на границе, то

$$(47) \quad k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}, \quad k_{iz} = k_{rz} = k_{tz}.$$

Используя соотношения для проекций волновых векторов из (41) найдем, что

$$(48) \quad \sin \theta_i = \sin \theta_r, \quad \cos \theta_i = \cos \theta_r.$$

Следовательно

$$(49) \quad \theta_i = \theta_r.$$

Это соотношение вместе с утверждением, что \mathbf{k}_r лежит в плоскости падения, суть **закон отражения** света.

Замечая, что $\frac{|\mathbf{k}_t|}{|\mathbf{k}_i|} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$, также найдем, что

$$(50) \quad \sin \theta_t = n_{12} \sin \theta_i.$$

Это соотношение вместе с утверждением, что \mathbf{k}_t лежит в плоскости падения, суть **закон преломления** света (закон Снелла).

Когда свет падает в оптически более плотную среду, т. е. $n_2 > n_1$ и относительный показатель для преломления света из первой среды во вторую $n_{12} > 1$

$$(51) \quad \sin \theta_t = \frac{1}{n_{12}} \sin \theta_i < \sin \theta_i < 1.$$

Законы отражения и преломления проверяют с помощью прибора, называемого *оптической шайбой*. Прибор состоит из неподвижного градуированного диска, устанавливаемого вертикально на штативе, и свободно перемещающегося по окружности диска осветителя. Узкий пучок света падает на стеклянный полуцилиндра с матовой поверхностью оснований. Полуцилиндр закрепляется на диске так, чтобы середина его плоской поверхности совпадала с центром диска. Пучок света направляется от осветителя вдоль радиуса диска и на границе воздух–стекло частично отражается, а частично преломляется. Пучок выходит из стекла в воздух перпендикулярно цилиндрической поверхности и поэтому не преломляется. Угол падения, отражения и преломления света измеряют по шкале диска.

Вещество	Показатель преломления, n	Предельный угол, $\bar{\theta}_i$
Вода	1,333	48°35'
Стекло	1,5	41°50'
Алмаз	2,4	24°40'

Таблица 3: Относительные показатели преломления и углы полного отражения

2.2 Явление полного отражения света

Закон преломления позволяет объяснить интересное и практически важное явление – **полное отражение света**. С помощью опыта с оптической шайбой можно наблюдать переход узкого луча света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду, т. е. $n_2 < n_1$ или относительный показатель для преломления света из первой среды во вторую $n_{12} = \frac{n_2}{n_1} < 1$. Эксперимент показывает, что при увеличении угла падения увеличивается угол преломления света. Кроме этого интенсивность преломленного луча света убывает, причем особенно быстро, когда угол преломления приближается к $\frac{\pi}{2}$. При этом доля отраженной от границы энергии ЭМ волны близка к 100 %. Такой ситуации соответствует некоторый предельный угол падения $\bar{\theta}_i$: при угле падения $\theta_i > \bar{\theta}_i$ весь падающий свет отражается от границы обратно в первую среду (стекло), – происходит полное отражение света.

Наименьший угол падения $\bar{\theta}_i$, при котором наступает полное отражение, называется **предельным углом полного отражения**

$$(52) \quad \bar{\theta}_i = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

Если свет переходит из какой-либо среды с абсолютным показателем преломления n в воздух, то

$$(53) \quad \bar{\theta}_i \cong \arcsin \frac{1}{n_{12}}.$$

Численные значения относительных показателей преломления некоторых веществ (относительно воздуха) и угла полного отражения приведены в таблице 3

Явление полного отражения ЭМ волны – это интересный физический феномен. По мере приближения угла падения к предельному значению интенсивность преломленной волны обращается в нуль, уменьшаясь *непрерывно*. Интенсивность отраженной волны, *непрерывно* возрастая, становится равной интенсивности падающей волны. Кроме этого, эксперимент показывает, что ЭМ поле во второй среде не исчезает, отсутствует лишь поток энергии ЭМ волны через границу!

Закон преломления (50) не имеет решения в области действительных значений угла преломления θ_t . В самом деле получается, что полное отражение возникает при углах падения, синус которых $n_{12} \leq \sin \theta_i \leq 1$, при этом угол преломления

$$(54) \quad \sin \theta_t > 1!$$

Это означает, что для значений угла падения, при которых свет полностью отражается, не существует вещественных значений угла преломления. Для дальнейшего анализа целесообразно определить для углов $\theta_i > \bar{\theta}_i$ комплексный угол преломления Θ_t

$$(55) \quad \sin \Theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{12}}, \quad \cos \Theta_t = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{12}^2} - 1}.$$

Тогда фазу "преломленной" волны

$$(56) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathbf{A}_t \exp[i(\omega t - x k_{tx} - z k_{tz})], \\ k_{tx} &= \frac{\lambda_2}{2\pi} \sin \theta_t, \quad k_{tz} = \frac{\lambda_2}{2\pi} \cos \theta_t, \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{n_2}{n_1}. \end{aligned}$$

можно записать следующим образом

$$(57) \quad e^{i\omega(t - x \frac{\sin \theta_i}{v_1})} e^{\pm \frac{z}{2h}},$$

где величина h называется **эффективной глубиной проникновения** волны в оптически менее плотную среду

$$(58) \quad h = \frac{\lambda_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{12}^2}}.$$

Ясно, что энергия ЭМ волны через границу не течет. Это значит, что в формуле для косинуса в (55) надо взять знак "минус". Тогда получим, что

$$(59) \quad \mathbf{E}_t = \underbrace{\mathbf{A}_t \exp\left(-\frac{z}{2h}\right)}_{\text{амплитуда неоднородной волны}} \times \exp\left[\underbrace{+i\omega\left(t - x \frac{\sin \theta_i}{v_1}\right)}_{\text{фаза}}\right].$$

Это формула показывает, что при полном отражении преломленная волна является **плоской неоднородной волной**. Это значит, что фаза волны "распространяется" в направлении оси X (в плоскости падения), а ее амплитуда убывает экспоненциально в перпендикулярном направлении z от границы раздела. Фазовая скорость неоднородной волны равна

$$(60) \quad v_{2x} = \frac{v_1}{\sin \theta_i} = \frac{c}{n_1 \sin \theta_i} = \frac{\frac{c}{n_2}}{\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i} = \frac{\sin \bar{\theta}_i}{\sin \theta_i} v_2,$$

где $v_2 = \frac{c}{n_2}$ — фазовая скорость плоской ЭМ волны во второй среде. Ясно, что фазовая скорость неоднородной волны непостоянна и зависит как от свойств среды, так и от угла падения.

Для оценки эффективной глубины проникновения рассчитаем интенсивность падающей волны, за отражающую поверхность. Интенсивность ЭМ излучения (света) I определяется как средний во времени поток излучения, проходящий за единицу времени через единицу площади в направлении к нормали к ней (в гауссовой системе)

$$(61) \quad I = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \mathbf{E}^2 \rangle.$$

Для оценки можно считать, что интенсивность прямо пропорциональна квадрату амплитуды волны. Тогда

$$(62) \quad I_t = I_0 \exp\left[-\frac{z}{h}\right],$$

где I_0 – некоторая постоянная, зависящая от угла падения света и показателя преломления. Таким образом, при проникновении волны в оптически менее плотную среду на глубину h порядка

$$(63) \quad h \sim \frac{\lambda_1}{4\pi}$$

интенсивность ЭМ волны убывает в $e = 2,71$ раз. Интенсивность волны ведет себя так как показано на рис. 3. Поэтому на расстояниях больших по сравнению с эффективной глубиной проникновения от границы раздела ЭМ поле во второй среде практически полностью затухает. Так как поглощение света прозрачной средой не происходит, то энергия, переносимая к границе падающей волной, должна целиком возвратиться в первую среду!

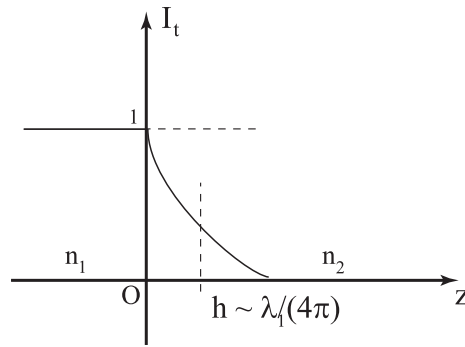


Рис. 3: Зависимость интенсивности волны снизу от границы раздела.

Проникновение падающей ЭМ волны в поверхностный слой полностью отражающей поверхности (на расстояние порядка длины волн) можно продемонстрировать для ЭМ сантиметрового диапазона ($\lambda_0 = 1,25$ см). Для этого берут две парафиновые призмы, имеющие сечение в виде равнобедренного прямоугольного треугольника, и располагают друг относительно друга так, что между гранями, на которых луч испытывает полное отражение, есть воздушный зазор, см. рис. 4. Полное отражение наступает лишь тогда, когда толщина воздушной прослойки имеет тот же порядок величины, что и длина падающей волны. Более тонкие воздушные прослойки, например в четверть длины волны, не являются непреодолимым "препятствием" для

падающей ЭМ волны. Поле в воздушной прослойке не вызывает преломления волны на границе с воздухом, однако во второй призме (оптически более плотном веществе) может возбудить "преломленный" луч.

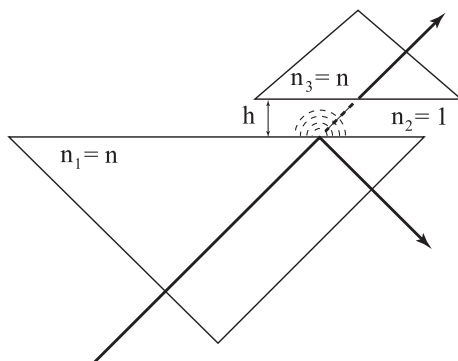


Рис. 4: Для достаточно малого зазора внутреннее отражение не будет полным.

2.3 Вопросы для самостоятельной работы

1. Предположим, что граница раздела двух сред не является достаточно "резкой", но гладкой: показатель преломления изменяется постепенно на расстоянии нескольких длин волн. Что при этом будет происходить с отраженной волной? Ответ объясните.
2. Сформулировать граничные условия для основных векторов ЭМ поля.
3. Доказать соотношения (45) и (47).
4. Почему полное отражение света является более "совершенным", чем отражение от металлических зеркал?

3 Лекция №3 "Формулы Френеля"

Вывод формул. Анализ формул Френеля.

Цель лекции — вывести соотношения между амплитудами падающей и отраженной волны, а также падающей и преломленной волны.

3.1 Вывод формул

На гладкую границу раздела двух незаряженных однородных диэлектриков (проницаемости $\mu_1 = \mu_2 \cong 1$ и $\varepsilon_1 = n_1^2$ и $\varepsilon_2 = n_2^2$) падает плоская монохроматическая волна. Пусть поверхность раздела — плоскость XY ; ось X — линия пересечения поверхности раздела с плоскостью падения XZ ; ось Z направлена перпендикулярно к плоскости падения.

Напряженности определены формулами (38) в Лекции №2. Для того чтобы в дальнейшем не загромождать формулы индексами, обозначим амплитуды падающей, отраженной и преломленной волны следующим образом

$$(64) \quad \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_r \rightarrow \mathbf{R}, \quad \mathbf{A}_t \rightarrow \mathbf{T}.$$

Вообще говоря эти векторы направлены под произвольным углом к плоскости падения. Можно доказать, что плоскую волну, вектор \mathbf{E} которой произвольно ориентирован относительно плоскости падения, можно представить в виде суммы двух плоских волн с взаимно перпендикулярными поляризациями: у одной в плоскости падения, а у другой — перпендикулярно ей.

Компоненты векторов, лежащих в плоскости падения XZ , будем обозначать с индексом \parallel , а индексом \perp — в перпендикулярной плоскости:

$$(65) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{\parallel} + \mathbf{T}_{\perp}. \end{aligned}$$

Перпендикулярные компоненты направлены под прямым углом к плоскости рисунка, см. рис. 5, и обозначены как \circ .

Декартовы компоненты напряженности эл. поля падающей волны равны

$$(66) \quad \begin{aligned} E_{ix} &= -A_{\parallel} \cos \theta_i e^{i\varphi_i}, \\ E_{iy} &= A_{\perp} e^{i\varphi_i}, \\ E_{iz} &= A_{\parallel} \sin \theta_i e^{i\varphi_i}, \end{aligned}$$

где φ_i обозначает фазу падающей волны

$$(67) \quad \varphi_i = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i - z \cos \theta_i}{v_1} \right).$$

Соответствующие компоненты вектора напряженности магнитного поля получаются с помощью формулы (в гауссовой системе единиц $\mu_0 = 1$)

$$(68) \quad \mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i}{\omega}.$$

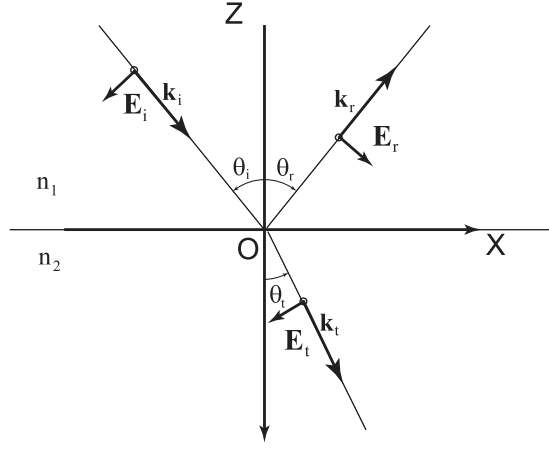


Рис. 5: Перпендикулярные и параллельные плоскости падения компоненты вектора напряженности.

Результат таков:

$$(69) \quad \begin{aligned} H_{ix} &= -A_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_i}, \\ H_{iy} &= -A_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_i}, \\ H_{iz} &= A_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_i}. \end{aligned}$$

Соответствующие формулы для компонент электрического поля отраженной волны имеют вид

$$(70) \quad \begin{aligned} E_{rx} &= R_{\parallel} \cos \theta_i e^{i\varphi_r}, \\ E_{ry} &= R_{\perp} e^{i\varphi_r}, \\ E_{rz} &= R_{\parallel} \sin \theta_i e^{i\varphi_r}, \end{aligned}$$

и магнитного поля

$$(71) \quad \begin{aligned} H_{rx} &= R_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_r}, \\ H_{ry} &= -R_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_r}, \\ H_{rz} &= R_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_r}. \end{aligned}$$

где φ_r обозначает фазу отраженной волны

$$(72) \quad \varphi_r = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{v_1} \right).$$

Аналогично для компонент электрического и магнитного поля преломленной волны справедливы формулы

$$(73) \quad \begin{aligned} E_{tx} &= -T_{\parallel} \cos \theta_t e^{i\varphi_t}, \\ E_{ty} &= T_{\perp} e^{i\varphi_t}, \\ E_{tz} &= T_{\parallel} \sin \theta_t e^{i\varphi_t}, \end{aligned}$$

$$(74) \quad \begin{aligned} H_{tx} &= -T_{\perp} \cos \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} e^{i\varphi_t}, \\ H_{ty} &= -T_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_2} e^{i\varphi_t}, \\ H_{tz} &= T_{\perp} \sin \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} e^{i\varphi_t}. \end{aligned}$$

где φ_t обозначает фазу преломленной волны

$$(75) \quad \varphi_t = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_t + z \cos \theta_t}{v_2} \right).$$

Теперь воспользуемся граничным условием (42) Лекции №2 для тангенциальных компонент напряженности \mathbf{E} . В данном случае имеем

$$(76) \quad E_{ix} + E_{rx} = E_{tx}, \quad E_{iy} + E_{ry} = E_{ty}.$$

Точно такое же граничное условие должно выполняться для тангенциальных компонент напряженности \mathbf{H}

$$(77) \quad H_{ix} + H_{rx} = H_{tx}, \quad H_{iy} + H_{ry} = H_{ty}.$$

Используя формулы (76), (77) и (70), (71), (73), (74), также (66) и (69) найдем

$$(78) \quad \begin{aligned} A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp}, \\ \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i (A_{\perp} - R_{\perp}) &= \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t T_{\perp}, \end{aligned}$$

и

$$(79) \quad \begin{aligned} \cos \theta_i (A_{\parallel} - R_{\parallel}) &= \cos \theta_t T_{\parallel}, \\ \sqrt{\varepsilon_1} (A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= \sqrt{\varepsilon_2} T_{\parallel}. \end{aligned}$$

Это уравнения показывают, что проекции векторов напряженности ЭМ поля параллельные плоскости падения и перпендикулярные к ней не перемешиваются между собой. Это значит, что при отражении и преломлении ЭМ волн, плоско поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости падения, изменение поляризации не происходит. Таким образом, волна любой другой поляризации будет себя вести в данной ситуации как линейная комбинация этих двух независимых волн.

Формулы Френеля, Огюстен Жан Френель (1788–1827), выражают параллельные и перпендикулярные компоненты амплитуды преломленной и отраженной волны через соответствующие компоненты падающей

$$(80) \quad \begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \\ T_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp}, \\ R_{\parallel} &= \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp}. \end{aligned}$$

Используя закон преломления формулы Френеля можно записать в другом виде

$$(81) \quad \begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \frac{A_{\parallel}}{\cos(\theta_i - \theta_t)}, \\ T_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}, \\ R_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}. \end{aligned}$$

На рисунках 6 и 7 изображены зависимости коэффициентов Френеля

$$(82) \quad r_{\parallel} \equiv \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}}, \quad r_{\perp} \equiv \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}}$$

в зависимости от угла падения θ_i для двух случая отражения: (1) отражение света от границы со средой с большим показателем преломления, см. рис. 6; (2) с меньшим показателем преломления, см. рис. 7.

3.2 Анализ формул Френеля

Формулы Френеля содержат также информацию о скачкообразном изменении фазы ЭМ при ее отражении от границе двух диэлектриков. Кроме этого мы рассмотрим случай нормально, скользящего падения света, а также вопрос о возможности полной поляризации естественного света волны при отражении.

1. **Соотношение между фазами волн при преломлении.** Его можно получить из формул Френеля (80): компоненты T_{\parallel} и T_{\perp} имеют такой же знак, что и A_{\parallel} и A_{\perp} (или $\mathbf{T}_{\parallel} \uparrow\uparrow \mathbf{A}_{\parallel}$ и $\mathbf{T}_{\perp} \uparrow\uparrow \mathbf{A}_{\perp}$). Это значит, что

Фаза \parallel, \perp -амплитуды преломленной волны равна фазе соответствующей амплитуды падающей волны.

2. **Явление Брюстера.** Если угол падения такой, что $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, то $\tan(\theta_B + \theta_t) = \infty$. Следовательно

$$(83) \quad R_{\parallel} = 0, \quad R_{\perp} = -\sin(\theta_B - \theta_t).$$

На рис. 6 видно, что для рассматриваемого случая $n_{12} = 1.52$ угол Брюстера равен $\theta_B = 56^{\circ}29'$ и $r_{\parallel} = 0$ при $\theta_i = \theta_B$. Таким образом,

если естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков под углом Брюстера θ_B , где $\tan \theta_B = n_{12}$, то отраженный свет будет полностью поляризованным в плоскости перпендикулярной плоскости падения.

При этом в преломленной волне компонента электрич. поля параллельная плоскости падения больше, чем перпендикулярная компонента

$$(84) \quad \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \cos(\theta_B - \theta_t) = \sin(2\theta_B) < 1.$$

Это означает, что преломленный свет будет **частично поляризованным**.

Отражение света под углом Брюстера от стеклянной плоскопараллельной пластинки дает простейший способ получения линейно поляризованного света, правда невысокой интенсивности. Для увеличения интенсивности применяется несколько стеклянных пластинок, сложенных в стопку (стопа Столетова).

3. **Соотношение между фазами волн при отражении.** Если вторая среда является более оптически плотной, чем первая ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), то $\theta_t < \theta_i$. В соответствии с формулами Френеля (81), знаки R_{\perp} и A_{\perp} амплитуд противоположные (или $\mathbf{R}_{\perp} \uparrow \downarrow \mathbf{A}_{\perp}$) и, соответственно, фазы отличаются на π , так как $\exp(i\pi) = -1$. На рис. 6 видно, что r_{\perp} является отрицательной величиной для всех углов падения. При этом же условии $\tan(\theta_i - \theta_t) > 0$, но $\tan(\theta_i + \theta_t) < 0$ при $\theta_i + \theta_t > \pi/2$, соответственно фазы R_{\parallel} и A_{\parallel} также отличаются на π . Это будет происходить тогда, когда $\theta_i > \theta_B$.

Таким образом,

при падении света на границу раздела со стороны оптически менее плотной среды при любых углах падения фаза перпендикулярной составляющей напряженности электрич. поля в отраженной волне изменяется на π радиан. Фаза параллельной составляющей скачком изменяются на π радиан при переходе через угол Брюстера.

Если вторая среда является более оптически плотной, то для $\theta_i < \bar{\theta}_i$ изменение фазы перпендикулярной составляющей напряженности электрич. поля не происходит, см. рис. 7. Фаза параллельной составляющей также изменяется скачком при переходе через угол Брюстера.

4. **При нормальном падении света различие между перпендикулярными и параллельными компонентами не наблюдается.**
Случай нормального падения соответствует углу падения $\theta_i = 0$. Из закона преломления следует, что угол преломления также равен нулю, $\theta_t = 0$.

$$\begin{aligned}
(85) \quad T_{\parallel} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_{\parallel}, \\
T_{\perp} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_{\perp}, \\
R_{\parallel} &= -\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_{\parallel}, \\
R_{\perp} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_{\perp}.
\end{aligned}$$

Различие в знак между компонентами отраженной и падающей волны чистая формальность, поскольку направления \mathbf{R}_{\perp} и \mathbf{A}_{\perp} всегда совпадают, а направления \mathbf{R}_{\parallel} и \mathbf{A}_{\parallel} должны быть противоположны.

Далее, если $n_1 < n_2$ (случай перехода света в оптически более плотную среду) отражение света сопровождается скачкообразным изменением фазы на π радиан. Если $n_1 > n_2$, то отражение происходит без изменения фазы.

5. При скольльзящем падении света происходит его "полное отражение".

При скольльзящем падении $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ радиан, тогда

$$(86) \quad \begin{aligned}
T_{\parallel} &= T_{\perp} = 0, \\
R_{\parallel} &= -A_{\parallel}, \quad R_{\perp} = -A_{\perp}.
\end{aligned}$$

Приведем простой пример. Изображение на гладкой поверхности моря заходящего за горизонт Солнца по яркости не уступает яркости Солнца!

В заключении необходимо заметить, что исследования отражения под углом Брюстера позволили обнаружить небольшие отклонения от предсказаний формул Френеля. Отступления от формул Френеля объясняется тем, что при отражении и преломлении граница между двумя средами не является математической, т. е. идеально гладкой с скачкообразным изменением оптических свойств. Существенным здесь является роль переходного молекулярного слоя, свойства которого отличаются от свойств сплошных сред, которых он разграничивает. Если это принять во внимание, то отступления от формул Френеля объясняются.

3.3 Вопросы для самостоятельной работы

1. Выведите формулы (70)–(74).
2. Выведите формулы Френеля (80) и (81).
3. В чем состоит физическая причина изменения скачком разности фаз колебаний между параллельными компонентами напряженности электрич. поля падающей и отраженной волнами при преходе через угол Брюстера? Как при этом изменятся фаза напряженности магн. поля в отраженной волне?

4. Какие физические факторы определяют значение угла Брюстера?
5. Какие отступления от формул Френеля были обнаружены экспериментально?

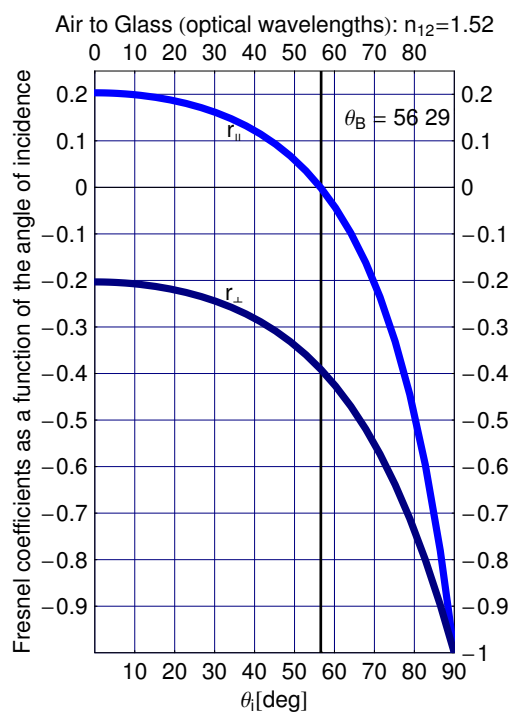


Рис. 6: Теоретические кривые для коэффициентов Френеля отраженной волны для видимого света на границе воздух–стекло, $n_{12} = 1,52$. Угол Брюстера равен $\theta_B = 56^{\circ}29'$.

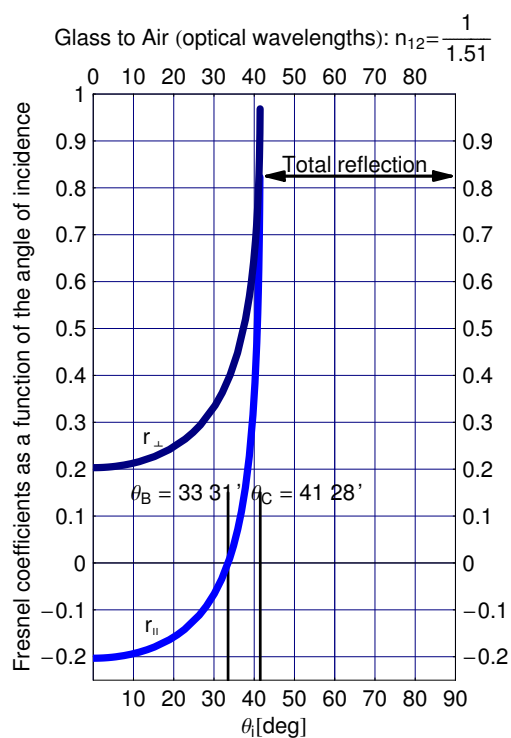


Рис. 7: Теоретические кривые для коэффициентов Френеля отраженной волны для видимого света на границе стекло–воздух, $n_{12} = \frac{1}{1,51}$. Угол Брюстера равен $\theta_B = 33^{\circ}31'$. Угол полного внутреннего отражения равен $\theta_C = 41^{\circ}28'$.

4 Лекция №4 "Энергия и интенсивность света"

*Закон сохранения энергии для ЭМ поля. Интенсивность света.
Коэффициенты отражения и пропускания.*

Цель — сформулировать закон сохранения энергии для ЭМ поля; рассчитать как распределяется энергия между отраженной и преломленной волнами при падении света на границе двух различных оптических сред.

4.1 Закон сохранения энергии для ЭМ поля

В электромагнитной теории интенсивность света характеризуется плотностью потока энергии поля. Из курса общей физика известно, что полная энергия поля, заключенного в некотором объеме однородной изотропной среды (диэлектрик), равна

$$(87) \quad W = \int_V dV [w_e(x, y, z) + w_m(x, y, z)],$$

где $dV = dx dy dz$ — элемент объема в декартовой системе координат, w_e и w_m — соответственно плотности энергии электрич. и магн. поля

$$(88) \quad w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad w_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}.$$

Почему выражение (87) можно отождествить с величиной полной энергии ЭМ поля? Ответ можно получить, если рассмотреть быстроту изменения $\frac{dW}{dt}$. Для замкнутой системы изменение полной энергии должно быть обусловлено работой, которую совершает поле над зарядами, находящимися в нем.

Из уравнений Максвелла (1) следует, что⁴

$$(89) \quad \frac{dW}{dt} = - \int_V dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \frac{c}{4\pi} \int_V dV \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}],$$

где согласно тождеству векторного анализа

$$(90) \quad -\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \equiv \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Формула (89) является прямым следствием уравнений Максвелла и материальных уравнений (5). Докажем, что (89) представляет собой закон **сохранения энергии для ЭМ поля**.

Известно, что электрич. ток, называемый **током проводимости**, связан с упорядоченным движением заряженных частиц внутри макроскопических тел. Плотность тока проводимости связана в величиной напряженности эл. поля в проводнике законом Ома, записанном в данном случае в дифференциальной форме

$$(91) \quad \mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E},$$

⁴В этой лекции мы будем пользоваться гауссовой системой единиц

где σ – удельная проводимость. Электрич. ток, называемый **конвекционным током**, описывает направленное движение макроскопических заряженных тел как целого

$$(92) \quad \mathbf{j}_v = \rho \mathbf{v},$$

где ρ – удельная плотность заряда тела, а \mathbf{v} – скорость его движения.

Таким образом, первое слагаемое представляет собой сумму мощности электрического тока проводимости Q и кулоновской силы P (характеризует механическую работу, совершаемую полем в единицу времени)

$$(93) \quad \int dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \int dV (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_v) \cdot \mathbf{E} = \underbrace{\int dV \sigma \mathbf{E}^2}_Q + \underbrace{\int dV \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}_P.$$

Согласно закону Джоуля–Ленца мощность тока проводимости определяет количество теплоты Q , выделяющееся в проводнике в единицу времени. Для диэлектрика ($\sigma = 0$) и диссипации энергии нет, $Q = 0$.

Интеграл по объему во втором слагаемом формулы (89) с помощью теоремы Остроградского–Гаусса преобразуется к интегралу по поверхности Σ , ограничивающую данную систему

$$(94) \quad \int_V dV \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \int_\Sigma d\Sigma [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности. Если мысленно представить себе возможность существования таких физических процессов внутри системы, что на ее границах поле можно считать пренебрежимо малым, то интеграл по поверхности будет стремиться к нулю. Поэтому в изолированной непроводящей системе уменьшение полной энергии W определяется механической работой, которую совершает ЭМ поле

$$(95) \quad \frac{dW}{dt} = -P.$$

Если представить себе систему, в которой свободные заряды отсутствуют, то согласно (89) уменьшение энергии ЭМ поля должно вызываться истечением поля через внешнюю границу физической системы. Таким образом поверхностный интеграл должен представлять собой **поток энергии** через границу. Этот поток можно отождествить с вектором

$$(96) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}],$$

называемым **вектором Умова–Пойтинга**, или вектором **плотности потока ЭМ энергии**. Поток вектора Умова–Пойтинга через замкнутую поверхность, ограничивающую непроводящую систему заряженных частиц, равен энергии, теряемой этой системой вследствие излучения ЭМ волн

$$(97) \quad \oint_\Sigma d\Sigma \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = -\frac{dW}{dt}.$$

Поэтому

модуль вектора \mathbf{S} равен энергии, переносимой ЭМ волной за единицу времени через единицу площади поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению распространения волны.

Плотность потока плоской ЭМ волны равна

$$(98) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E \mathbf{H} \mathbf{N} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{N} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H^2 \mathbf{N}.$$

Для $|\mathbf{S}|$ из (98) находим

$$(99) \quad |\mathbf{S}| = \frac{1}{4\pi} v \varepsilon E^2,$$

где $v = \frac{c}{n}$ — скорость распространения плоской волны. В диэлектрике объемная плотность энергии ЭМ поля (88) выражается формулой

$$(100) \quad w = w_e + w_m = \frac{1}{4\pi} \varepsilon E^2,$$

где $\mathbf{V} \cdot \mathbf{H} = \varepsilon E^2$. Поэтому

$$(101) \quad S = vw.$$

4.2 Интенсивность света

Мы выяснили, что вектор Умова–Пойтинга характеризуют плотность потока энергии и объемную плотность энергии. В полученные выше формулы (100) и (101) входят мгновенные значения величин. Так как в оптическом диапазоне частота ЭМ излучения очень велика, составляет порядка $\nu \sim 10^{15}$ Гц, мгновенное значение быстро изменяющихся со временем физических величин регистрировать невозможно. Физический смысл будет иметь только их средние значения за некоторый промежуток времени τ (**время разрешения** данного физического прибора) намного больший, чем время одного периода колебаний $T = 1/\nu$.

Вычислим среднее значение (за время регистрации) плотности потока энергии. Для этого необходимо представить напряженности полей, записанных в комплексной форме, следующим образом

$$(102) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \mathbf{E}_0(\mathbf{r})^* e^{-i\omega t}], \\ \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) &= \Re \{ \mathbf{H}_0 e^{i\omega t} \} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \mathbf{H}_0(\mathbf{r})^* e^{-i\omega t}], \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ комплексные функции координат, не зависящие от времени. Для среднего значения плотности потока энергии справедлива следующая

шая формула (зависимость от координат подразумевается)

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dt \\
(103) \quad &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2\tau} \frac{1}{4} \int_{-\tau}^{\tau} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{2i\omega t} + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0^* e^{-2i\omega t}], \\
&= \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*] + \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0^*] \frac{1}{4\pi} \frac{T}{\tau} \sin(2\omega\tau).
\end{aligned}$$

При выполнении условия $T/\tau \ll 1$ получается, что

$$(104) \quad \langle \mathbf{S} \rangle \cong \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*] = \frac{1}{4\pi} v\varepsilon \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0) = \frac{1}{4\pi} v\varepsilon (\frac{1}{2} A^2),$$

где A — амплитуда световой волны (действительная величина). Эта величина называется **интенсивностью** и обозначается символом I .

Теперь закон сохранения энергии принимает более простую форму. Для непроводящей среды при условии, что механическая работа не совершается, получается из формулы (97)

$$(105) \quad \oint d\Sigma \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = 0.$$

Смысл этой формулы следующий. Среднее значение полного потока через замкнутую поверхность равен нулю.

4.3 Коэффициенты отражения и пропускания

В качестве весьма полезного для практических приложений примера исследуем как энергия ЭМ волны, падающей на границу двух прозрачных сред, разделяется на отраженную и преломленную волну. Согласно (104) интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды волны

$$(106) \quad I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon} \Re(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = \frac{cn}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2.$$

Учитывая направление распространения волн, запишем выражения для интенсивности падающего, отраженного и преломленного света

$$\begin{aligned}
I_i &= \langle |\mathbf{S}_i| \rangle \cos \theta_i = \frac{cn_1}{8\pi} A^2 \cos \theta_i, \\
(107) \quad I_r &= \langle |\mathbf{S}_r| \rangle \cos \theta_i = \frac{cn_1}{8\pi} R^2 \cos \theta_i, \\
I_t &= \langle |\mathbf{S}_t| \rangle \cos \theta_t = \frac{cn_1}{8\pi} T^2 \cos \theta_t,
\end{aligned}$$

где A, R и T — соответственно амплитуды падающей, отраженной и преломленной световых волн.

Отношения соответствующих интенсивностей можно представить в следующем виде

$$(108) \quad \varrho = \frac{I_r}{I_i} = \frac{R^2}{A^2}, \quad \tau = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t T^2}{n_1 \cos \theta_i A^2}$$

называются **коэффициентом отражения (отражательной способностью)** и **коэффициентом пропускания (пропускательной способностью)**. В соответствии с законом сохранения энергии

$$(109) \quad \varrho + \tau = 1.$$

Отражательная и пропускательная способность зависят от поляризации падающей волны. Пусть α_i угол между плоскостью поляризации падающей волны и плоскость падения (**азимут поляризации** падающей волны, $\tan \alpha_i = \frac{A_\perp}{A_\parallel}$), то удобно ввести следующие коэффициенты

$$(110) \quad \varrho_\parallel = \frac{R_\parallel^2}{A_\parallel^2}, \quad \varrho_\perp = \frac{R_\perp^2}{A_\perp^2}, \quad \tau_\parallel = \frac{T_\parallel^2}{A_\parallel^2}, \quad \tau_\perp = \frac{T_\perp^2}{A_\perp^2}.$$

Азимут поляризации α_i считается положительным, когда плоскость поляризации поворачивается по часовой стрелки вокруг направления распространения волны и изменяется в пределах $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$.

Нетрудно убедиться, что

$$(111) \quad \varrho = \varrho_\parallel \cos^2 \alpha_i + \varrho_\perp \sin^2 \alpha_i,$$

$$(112) \quad \tau = \tau_\parallel \cos^2 \alpha_t + \tau_\perp \sin^2 \alpha_t$$

где α_t – азимут поляризации преломленной волны и

$$(113) \quad \varrho_\parallel = \left(\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)},$$

$$(114) \quad \varrho_\perp = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}.$$

и

$$(115) \quad \tau_\parallel = \frac{\sin(2\theta_i) \sin(2\theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)},$$

$$(116) \quad \tau_\perp = \tau_\parallel \cos^2(\theta_i - \theta_t).$$

На рисунках 8 и 9 изображены зависимости коэффициентов отражения от угла падения.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$(117) \quad \varrho_\parallel + \tau_\parallel = 1, \quad \varrho_\perp + \tau_\perp = 1.$$

Коэффициент отражения $\bar{\rho}$ и пропускания $\bar{\tau}$ для **неполяризованного света** получается усреднением ϱ_α по всем возможным α_i . Учитывая, что среднее значение $\langle \cos^2 \alpha_i \rangle = \langle \sin^2 \alpha_i \rangle = \frac{1}{2}$, найдем

$$(118) \quad \bar{\rho} = \frac{1}{2}(\varrho_{\parallel} + \varrho_{\perp}),$$

$$(119) \quad \bar{\tau} = 1 - \bar{\rho}.$$

Даже в этом случае в отраженном свете будут преобладать колебания в плоскости перпендикулярной плоскости падения, т. е. отраженный свет будет **частично поляризованным**. Степень поляризации равна

$$(120) \quad P = \frac{I_{r\perp} - I_{r\parallel}}{I_{r\perp} + I_{r\parallel}} = \frac{\varrho_{\perp} - \varrho_{\parallel}}{2\bar{\rho}}.$$

4.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Вывести формулы

$$(121) \quad \langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} |\mathbf{E}_0|^2, \quad \langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} |\mathbf{H}_0|^2$$

для среднего значения плотности энергии эл. и маг. поля. Показать, что $\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle$.

2. С помощью формул Френеля выразить тангенс азимута поляризации отраженной и преломленной волн через $\tan \alpha_i$

$$(122) \quad \tan \alpha_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan \alpha_i,$$

$$(123) \quad \tan \alpha_t = \cos(\theta_i - \theta_t) \tan \alpha_i,$$

используя следующие обозначения: $\tan \alpha_r = \frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}$ и $\tan \alpha_t = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$. Убедитесь в том, что всегда

$$(124) \quad |\tan \alpha_r| \geq |\tan \alpha_i|, \quad |\tan \alpha_t| \leq |\tan \alpha_i|.$$

Какой физический смысл этих неравенств? Зависимость азимута поляризации от угла падения изображена на рис. 10.

3. Выведите формулы для коэффициента отражения и пропускания для случая нормального падения света

$$(125) \quad \varrho = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2,$$

$$(126) \quad \tau = \frac{4n_2}{(n_2 + n_1)^2}.$$

Покажите, что чем меньше различие в оптических плотностях двух сред, тем меньше энергии приходится на отраженную волну и, соответственно, больше на прошедшую. Вычислите значения этих коэффициентов для границы воздух-стекло и воздух-вода. Показатели преломления $n_{12} = 1.5$ и $n_{12} = \frac{4}{3}$.

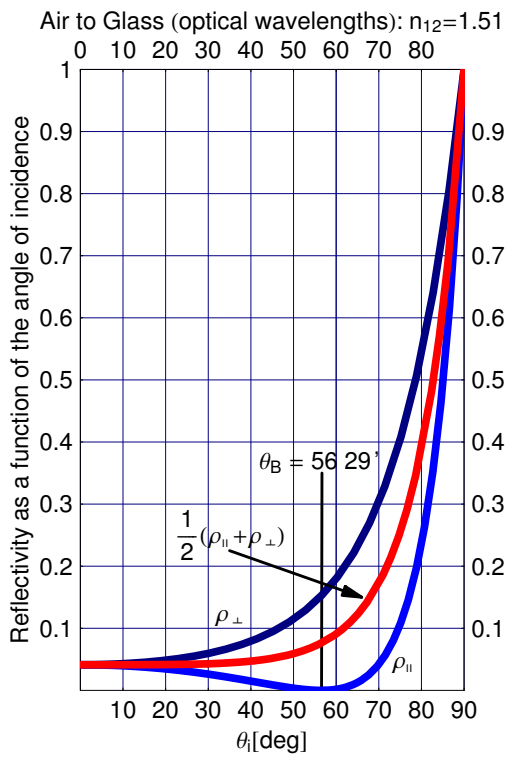


Рис. 8: Теоретические кривые для коэффициентов отражения видимого света на границе воздух–стекло, $n_{12} = 1,51$. Угол Брюстера равен $\theta_B = 56^\circ 29'$.

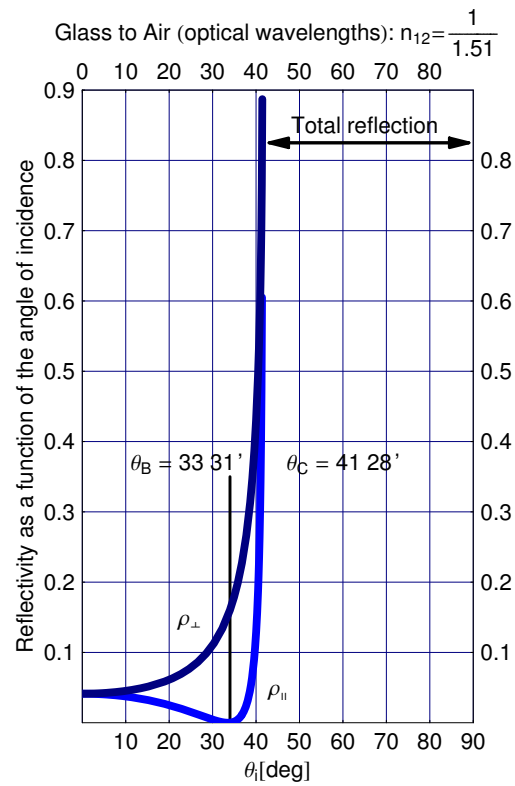


Рис. 9: Теоретические кривые для коэффициентов отражения видимого света на границе стекло–воздух, $n_{12} = \frac{1}{1,51}$. Угол Брюстера равен $\theta_B = 33^\circ 31'$. Угол полного внутреннего отражения равен $\theta_C = 41^\circ 28'$.

Air to Glass (optical wavelengths): $n_{12}=1.51$, $\alpha_i=45^\circ$

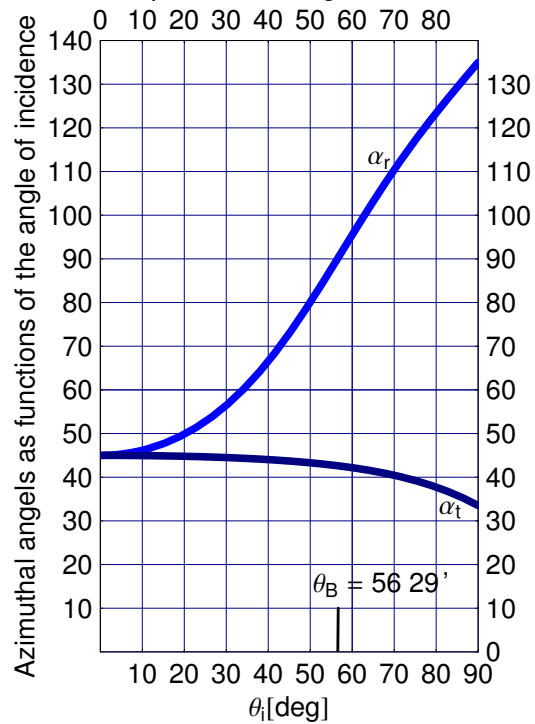


Рис. 10: На рисунке изображены теоретические кривые, показывающие зависимость азимутов поляризации α_r отраженной и α_t преломленной волн от угла падения θ_i на границе воздух-стекло для видимого света, $n_{12} = 1,51$. Азимут поляризации α_i падающей волны равен 45° .

5 Лекция №5 "Интерференция монохроматического света"

Определение интерференции. Интерференция монохроматических волн. Когерентность света. Интерференция, осуществляемая делением волнового фронта.

Цель настоящей лекции — вывести общие формулы для двухлучевой интерференции монохроматического света; рассмотреть интерференционные опыты, осуществляемые делением фронта волны.

5.1 Определение интерференции

Волновому движению любой природы присущи такие явления как интерференция и дифракция. Существует множество экспериментальных доказательств интерференции и дифракции света. Это позволяет утверждать, что при определенных физических условиях свет проявляет волновую природу. В лаборатории оптики вы можете наблюдать ИС, характеризующуюся образованием стационарной (постоянной во времени) интерференционной картины, например кольца Ньютона или интерференционные полосы, получаемые при освещении лазерным светом тонких пластинок. В обоих случаях интерференционная картина, которая представляет собой регулярное чередование областей повышенной и пониженной интенсивности света.

Интерференция света (ИС) – пространственное перераспределение средней плотности потока энергии светового излучения (интенсивности света), происходящее в результате суперпозиции волн.

Средняя плотность потока энергии, или интенсивность света, определяется величиной (см. формулу (106) Лекции №4)

$$(127) \quad I = \frac{cn}{4\pi} \langle \Re \mathbf{E} \cdot \Re \mathbf{E} \rangle = \frac{cn}{4\pi} \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = \frac{cn}{4\pi} \frac{1}{2} \mathbf{A}^2,$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{A} e^{-i\varphi}$ и амплитуда \mathbf{A} предполагается действительной величиной.

5.2 Интерференция монохроматических волн

Мы покажем, что результирующая интенсивность света определяется соотношением фаз и поляризацией накладывающихся друг на друга волн. В качестве первого приближения в изучении интерференции световых волн от реальных источников света мы рассмотрим интерференцию строго монохроматических волн (в природе не существующих).

Пусть в направлении оси Ox распространяются две плоские монохроматические линейно поляризованные волны

$$(128) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{A}_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{A}_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}, \end{aligned}$$

где $\varphi_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \delta_i$ — часть фазы, независящая от времени, для соответствующей волны, а \mathbf{A}_i — действительная амплитуда волн.

Согласно принципу суперпозиции в некоторой точке P результирующая напряженность равна

$$(129) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Если векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 либо параллельны, либо антипараллельны друг другу, то можно провести сложение с следующим образом

$$(130) \quad E = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) = A e^{i(\omega t + \varphi)},$$

где A — результирующая амплитуда и φ — фаза волны. Эти величины можно найти при помощи векторной диаграммы, см. рис. 11,

$$(131) \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta,$$

$$(132) \quad \tan \delta = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Угол $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ на векторной диаграмме обозначает разность фаз накладываемых колебаний.

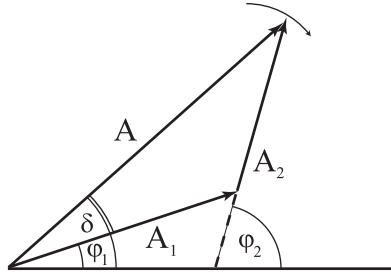


Рис. 11: Векторная диаграмма сложения двух колебаний по принципу суперпозиции.

Поскольку интенсивность волны прямо пропорционально квадрату ее амплитуды, то вклад в результирующую интенсивность дают три слагаемых

$$(133) \quad I = I_1 + I_2 + I_{12},$$

где $I_i = \frac{cn}{4\pi} \frac{1}{2} A_i^2$ — интенсивность каждой волны в отдельности, а I_{12} — интерференционное слагаемое, которое для нашего простого случая может легко вычислено

$$(134) \quad I_{12} = \frac{cn}{4\pi} 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta.$$

Мы видим, что интенсивность результирующей волны в области суперпозиции двух монохроматических волн одинаковой частоты в одной области

пространства может оказаться больше, а в другой меньше суммы интенсивностей каждой волны. Таким образом происходит перераспределение энергии светового излучения в пространстве. В данном случае это перераспределение стационарное, так как разность фаз двух монохроматических волн одинаковой частоты в каждой точке пространства постоянна. Волны с одинаковой частотой и постоянной разностью фаз называются *когерентными*. Только когерентные волны, налагаясь друг на друга, дают устойчивую интерференционную картину с неизменным положением в пространстве максимумов и минимумов колебаний.

Очевидно, что максимумы результирующей интенсивности

$$(135) \quad I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

встречаются там, где

$$(136) \quad \pm\delta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$$

Минимумы результирующей интенсивности

$$(137) \quad I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

соответствуют разности фаз

$$(138) \quad \pm\delta = \pi, 3\pi \dots$$

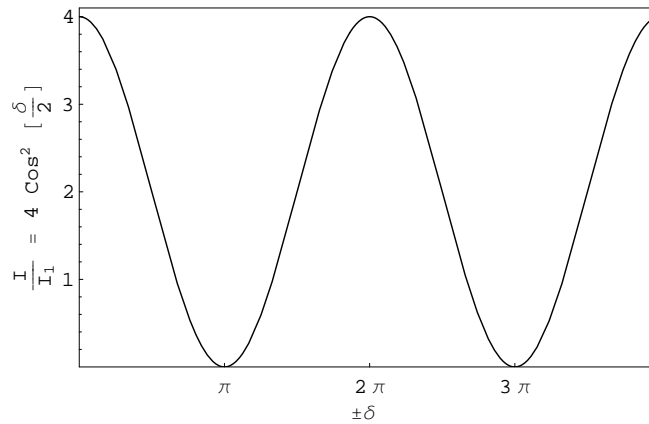


Рис. 12: Интерференция двух лучей света равной интенсивности. Зависимость интенсивности от разности фаз.

Рассмотрим частный случай интерференции двух волн одинаковой интенсивности $I_1 = I_2$. В этом случае

$$(139) \quad I = 2I_1(1 + \cos \delta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Эта формула показывает, что результирующая интенсивность изменяется в пределах между максимальным $I_{\max} = 4I_1$ и минимальным $I_{\min} = 0$ значениями. Зависимость интенсивности от разности фаз показана на рис. 12. Пунктирная кривая показывает уровень результирующей интенсивности $2I_1$, если интерференции нет, т. е. $I_{12} = 0$.

5.3 Когерентность волн

Формула (139) показывает, что стационарная интерференционная картина будет возникать тогда, когда разность фаз δ (для данной точки пространства) остается постоянной во времени (при дополнительном условии, то поляризации волн во взаимно не перпендикулярны).

На результат интерференции волн существенное влияние оказывает их **когерентность**, — согласованное протекание во времени и пространстве волновых процессов. Две волны называются **когерентными**, если разность фаз колебаний остается постоянной во времени и при суперпозиции колебаний определяет амплитуду результирующего колебания.

Дело в том, что идеально гармонические колебания нельзя осуществить. В реальных колебательных процессах амплитуда, фаза и частота колебаний могут непрерывно хаотически изменяться во времени. Если, например, фазы двух колебаний φ_1 и φ_2 изменяются беспорядочно, но их разность $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ в одной и той же точке пространства остается постоянной, то колебания будут когерентны. Если разность фаз двух колебаний изменяется достаточно медленно, то в этом случае колебания остаются когерентными лишь в течение некоторого времени, пока их разность фаз не успела измениться на величину порядка π радиан. Это явление — проявление **временной когерентности**, связанной с некогерентностью излучения реальных источников света. Количественно это явление характеризуется физической величиной, которая называется *временем когерентности*. Ее мы подробно обсудим в последующих лекциях.

С другой стороны, как и идеально гармоническое колебание, идеально плоская волна также не существует. В реальных волновых процессах амплитуда и фаза волны изменяются не только вдоль направления распространения волны, но и в плоскости перпендикулярной этому направлению. Это вызвано особенностями процессов излучения и формирования волн протяженными источниками. Случайные изменения разности фаз в одни и те же промежутки времени в двух точках, расположенных в этой плоскости, увеличивается с ростом расстояния между ними. Колебания перестают быть когерентными на некотором расстоянии, когда случайные изменения разности фаз становятся сравнимыми с π . Это суть проявление **пространственной когерентности**. Ее точные количественные критерии мы рассмотрим в следующей лекции.

5.4 Интерференция, осуществляемая делением волнового фронта

Для получения когерентных источников света, которые соответственно излучают когерентные световые волны, существует простой способ, который нашел в 1815 г. француз О. Ж. Френель: необходимо разделить свет от одного источника света на два пучка и, заставив их пройти различные пути, свести вместе. Этот метод называется **деление волнового фронта**.

Первая экспериментальная демонстрация явления интерференции света была осуществлена англичанином Томасом Юнгом (1773–1829) во время публичных лекций в 1807 г. Этот уже классический опыт имеет не только

исторический, но и практический интерес (например, измерение углового расстояния между двум удаленными источниками света). Физическая идеализация этого опыта такова. Свет от **точечного и монохроматического источника** света S^5 падает на непрозрачный экран, в котором проделаны булавкой две близко расположенные узкие щели S_1 и S_2 , находящиеся на одинаковом расстоянии от источника S^6 . Узкие щели являются вторичными точечными *синфазными* источниками, лучи свет которых накладываются друг на друга и проецируются на экран, см. рис. 13.

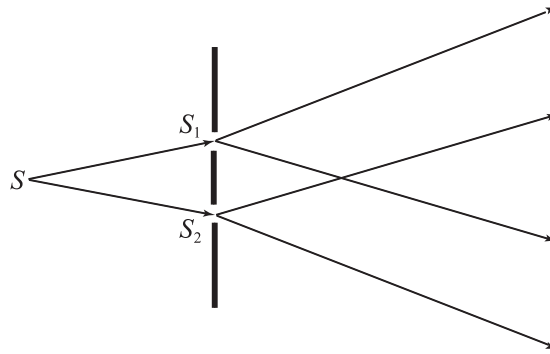


Рис. 13: Схема опыта Юнга. На рисунке показано сечение волнового фронта и экрана с щелями плоскостью, проходящей через точечный источник S и перпендикулярной экрану.

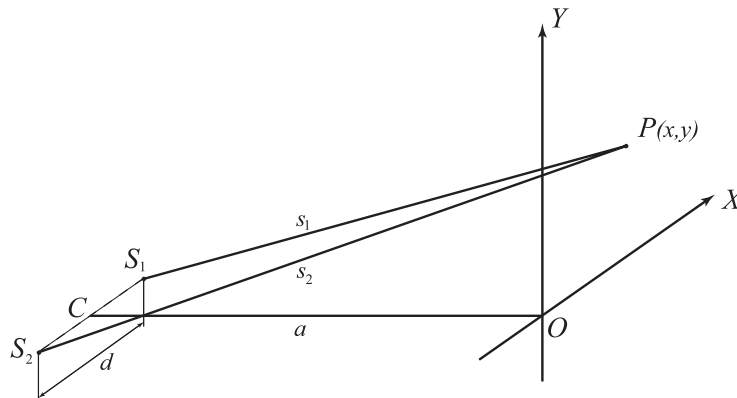


Рис. 14: Геометрия опыта Юнга.

Геометрия опыта изображена на рис. 14, где d обозначает расстояние между щелями S_1 и S_2 , а a – расстояние до проекционного экрана (плоскость XOY), на котором наблюдается интерференционная картина⁷. По

⁵В действительности это была дуговая лампа, расположенная позади красного светофильтра, $\lambda \cong 600$ нм. Размер источника – 0,25 мм. Расстояние от S до S_1S_2 составляло 1 м.

⁶На посеребренном экране щели шириной не более 0,1 мм с промежутком около $d = 0,7$ мм можно сделать при помощи лезвия бритвы.

⁷В опыте Т. Юнга расстояние $a = 5$ м; можно было наблюдать 6 параллельных полос по обе стороны от центрального максимума.

причине малости длины волны видимого света, интерференционная картина может быть получена, если *угол схождения* α двух лучей S_1P и S_2P очень мал⁸

$$(140) \quad \alpha \simeq \frac{d}{a} \ll 1.$$

Геометрическая *разность хода* двух лучей, пришедших из S_1 и S_2 в точку P с координатами x и y равна

$$(141) \quad \Delta s = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_1 + s_2}.$$

При условии, что

$$(142) \quad x, y \ll a$$

выполняется условие

$$(143) \quad s_1 + s_2 \simeq 2a.$$

Тогда геометрическая разность хода двух лучей равна

$$(144) \quad \Delta s = x\alpha.$$

Разность фаз, соответствующая разности хода (144), равна

$$(145) \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha x.$$

По причине малости угла схождения α можно считать, что волны распространяются в одном направлении и, тогда, результирующая интенсивность может вычислена по формуле (139). Тогда согласно формулам (136) и (138) максимумы и минимумы интенсивности наблюдаются, когда

$$(146) \quad x_{\max} = m \frac{\lambda}{\alpha}, \quad x_{\min} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{\alpha},$$

где число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ называется порядком максимума (минимума) в данной точке.

Таким образом в точках экрана, координата которых равна x_{\max} , выполняется следующее условие

$$(147) \quad \Delta s = m\lambda.$$

Волны усиливают друг друга и результирующая интенсивность в 4 раза превосходит интенсивность каждой из волн. Напротив, в точка экрана с координатами x_{\min} , для которых выполняется условие

$$(148) \quad \Delta s = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$$

волны полностью гасят друг друга, т. е. суммарная интенсивность света равна нулю.

⁸В опыте Т. Юнга $\alpha \simeq 0,00014$ рад.

В результате интерференционная картина вблизи центра экрана O представляет собой чередующиеся узкие темные и светлые полосы одинаковой ширины параллельные оси OY . Интенсивность света изменяется с изменением расстояния x по закону, см. рис. 12⁹,

$$(149) \quad I = 2I_1 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{\alpha x}{\lambda}\right) \right].$$

Эта формула показывает, что образование интерференционной картины обусловлено лишь перераспределением энергии светового излучения в пространстве. Среднее значение интенсивности по всей длине интерференционной картины равно сумме интенсивностей от двух источников.

Ширина интерференционной полосы (расстояние между соседними максимумами или минимумами)

$$(150) \quad \Delta x \simeq \frac{\lambda}{\alpha}$$

прямо пропорциональна длине волны λ и обратно пропорциональна углу схождения лучей α ¹⁰.

5.5 Вопросы для самостоятельной работы

1. Какой формы необходимо взять источник света в опыте Юнга, схема которого изображена на рис. 13 и 14, и как его расположить, для того чтобы картина интерференции была одинаковой во всех плоскостях, параллельных плоскости рисунка.
2. Как будет меняться интерференционная картина в опыте Юнга, если проекционный экран приближать к источникам S_1 и S_2 ? Как изменится интерференционная картина, если проекционный экран расположить перпендикулярно линии S_1S_2 ?
3. Рассмотрите следующие опыты деления волнового фронта для демонстрации интерференции света: *бипризма Френеля*, *билинза Бийе*, *зеркало Ллойда* и *бизеркало Френеля*. В каждом случае изобразите оптическую схему опыта указав положения источника света S и двух мнимых источников света S_1 и S_2 . Опишите вид интерференционной картины в каждом опыте и найдите в каждом случае ширину интерференционной полосы.
4. Опыт показывает, что в опыте Юнга интенсивность не будет неизменной при переходе от одного интерференционного максимума к другому и не остается постоянной вдоль одной интерференционной полосы. Почему?
5. Докажите, используя формулу (149), что среднее значение суммарной интенсивности равно сумме интенсивностей от двух источников.

⁹Этот график не учитывает явление дифракции в каждой щели, приводящих к тому, что интенсивность света в максимумах не будет постоянной.

¹⁰В опыте Т. Юнга $\Delta x \simeq 4,3$ мм.

6 Лекция №6 "Пространственная когерентность"

Введение. Расчет видности. Критерий пространственной когерентности.

Цель лекции — исследовать роль размеров источника в интерференции света; рассчитать видность интерференционной картины в опыте Юнга в случае использования протяженного монохроматического источника света; найти причину ухудшения видности и сформулировать критерии пространственной когерентности, при которых получается допустимая контрастность полос.

6.1 Введение

Для наблюдения интерференции света при помощи бипризмы Френеля и подобных ей устройств геометрические размеры **монохроматического** источника света должны быть малы. С увеличением размеров источника уменьшается контрастность интерференционной картины. Для количественной характеристики контрастности интерференционных полос американский физик Альберт Майкельсон (1852–1931) ввел **функцию видности**

$$(151) \quad \mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} интенсивность света в максимумах и минимумах интерференционной картины соответственно. Ясно, что в случае интерференции света от двух одинаковых точечных источников монохроматического света, когда $I_{\min} = 0$, видность принимает максимальное значение $\mathcal{V} = 1$. Когда $I_{\min} \rightarrow I_{\max}$ видность $\mathcal{V} \rightarrow 0$, т. е. интерференционные полосы исчезают и экран, на который проецируется интерференционная картина, становится равномерно освещенным. Опыт показывает, что использование **протяженного источника света** приводит к ухудшению контрастности интерференционной картины и даже к ее полному исчезновению.

Это означает, что световое излучение протяженного источника света не является когерентным, хотя оно может быть монохроматическим. Степень когерентности такого излучения определяется контрастностью интерференционной картины.

При анализе явлений двухлучевой интерференции света от протяженного источника света по методу деления волнового фронта можно сформулировать условие когерентности излучения. Это условие учитывает степень *корреляцию фазы*, которая изменяется по фронту волны в результате статистических флуктуаций. Для этого вводят понятие **пространственной когерентности** излучения, которое количественно характеризуется двумя физическими величинами: **радиусом** и **углом пространственной когерентности**.

6.2 Расчет видности

Схема интерферометра Юнга с протяженным источником света приведена на рис. 15. Интерференция наблюдается на экране, плоскость которого перпендикулярна плоскости первичного протяженного S и вторичных

точечных S_1 и S_2 источников света. Протяженный источник света можно представить себе как светящийся отрезок, длина которого равна b . Угол равный

$$(152) \quad \Omega \approx \frac{d}{l}$$

называется апертурным углом или апертурой интерференции. Здесь l – расстояние между протяженным источником S и интерферометром S_1S_2 .

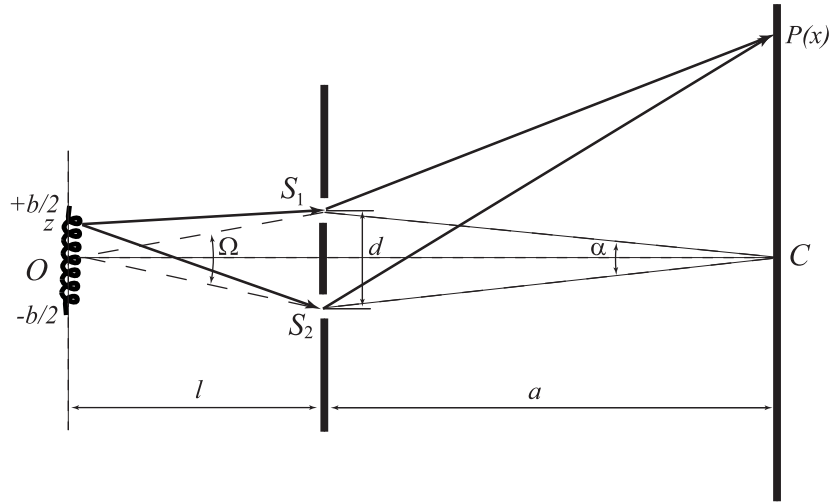


Рис. 15: Иллюстрация к расчету видности интерференционной картины в опыте Юнга от протяженного источника монохроматического света.

Светящийся отрезок можно представить как непрерывное линейное распределение **точечных некогерентных** источников света, суммарная интенсивность которых равна I_0 . Тогда элемент протяженного источника длиной dz и координатой z ($-\frac{b}{2} \leq z \leq +\frac{b}{2}$) излучает свет интенсивности

$$(153) \quad \frac{I_0}{b} dz.$$

При условии, что углы Ω и угол схождения лучей $\alpha \approx \frac{d}{a}$ малы, геометрическая разность хода двух лучей, идущих от точечного источника z , проходящих через S_1 и S_2 и пересекающихся в некоторой точке P на экране равна

$$(154) \quad \Delta s \simeq \Omega z + \alpha x.$$

Первое слагаемое показывает, что если $z \neq 0$, то вторичные источники света S_1 и S_2 уже не будут синфазными. Поэтому в точке P возникает дополнительная разность фаз

$$(155) \quad \delta(z, \Omega) = \frac{2\pi}{\lambda} \Omega z.$$

В результате интерференции интенсивность света изменяется с изменением расстояния x , от центра экрана O , по закону

$$(156) \quad dI(x, z) = \frac{2I_0 dz}{b} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\Omega z + \alpha x)\right) \right].$$

Если выделить другой точечный элемент источника, координата которого равна z' , то получится

$$(157) \quad dI(x, z') = \frac{2I_0 dz'}{b} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\Omega z' + \alpha x)\right) \right].$$

Формулы (156) и (157) показывают, что в интерферометре Юнга такое смещение точечного источника света приводит к тому, что интерференционная картина смещается параллельно своей длине. Это приводит к тому, что максимумы одной картины могут совпасть с минимумами другой и в результате интерференционная картина "размножается". В результате экран будет просто равномерно засвечен с интенсивностью .

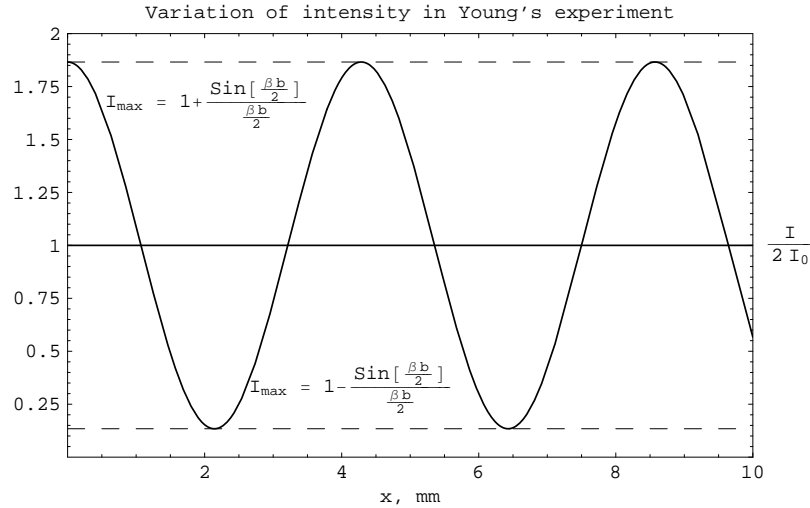


Рис. 16: Распределение интенсивности в интерференционной картине от протяженного источника света в опыте Юнга. При построении кривой использовались следующие параметры: $\lambda = 600$ нм, $d = 0,7$ мм, $b = 0,25$ мм, $\Omega = 0,0007$ рад и $\alpha = 0,00014$ рад.

Суммарное распределение интенсивности света, излучаемого протяженным источником света, получается путем сложения интерференционных картин некогерентных точечных источников

$$(158) \quad I(x) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dI(x, z) = \frac{2I_0}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\Omega z + \alpha x)\right) \right].$$

Вычислив этот интеграл, получим

$$(159) \quad I(x) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{\beta b}{2}}{\frac{\beta b}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x\right) \right],$$

где $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Omega$ временная переменная. График зависимости $I(x)$ показан на рис. 16. Интенсивность света в максимумах и минимумах равна

$$(160) \quad I_{\max} = 2I_0 \left[1 + \frac{|\sin \frac{\beta b}{2}|}{\frac{\beta b}{2}} \right], \quad I_{\min} = 2I_0 \left[1 - \frac{|\sin \frac{\beta b}{2}|}{\frac{\beta b}{2}} \right],$$

а функция видности очевидно имеет следующий вид

$$(161) \quad \mathcal{V} = \frac{|\sin \frac{\beta b}{2}|}{\frac{\beta b}{2}} = \frac{|\sin \frac{\pi \Omega}{\lambda/b}|}{\frac{\pi \Omega}{\lambda/b}}.$$

Исследуем зависимость функции видности (161) от размера протяженного источника света. Эта зависимость изображена на рис. 17. Значение видности $\mathcal{V} = 1$ соответствует точечному источнику света, так как для точечного источника $b \rightarrow 0$ формула (161) дает $\mathcal{V} \rightarrow 1$. Кривые, изображенные на рис. 16 и 17 показывают, что линейный источник света с равномерным распределением интенсивности дает такую же интерференционную картину, что и точечный источник. Однако их видность уменьшается. Таким образом, мы можем сделать следующий вывод:

видность интерференционных полос зависит от размера источника света. Измеряя видность полос можно определить, например, угловой размер источника, каким мы его видим из места расположения интерферометра

$$(162) \quad \phi = \frac{b}{l}.$$

6.3 Критерий пространственной когерентности

Если говорить о нелазерных источниках света, то когерентного излучения, для которого $\mathcal{V} = 1$ не существует. Поэтому необходимо получить количественный критерий, при какой видимости излучение можно называть когерентным.

Обозначим $\mathcal{V}_{\text{ког}}$ минимальное значение функции видности, при котором контрастность интерференционной картины еще можно считать удовлетворительной. Этому значению соответствует некоторый максимальный размер источника $b_{\text{ког}}$. Тогда, если выполняется условие $0 < b < b_{\text{ког}}$, то излучение протяженного источника света S можно считать **когерентным** (поскольку $\mathcal{V}_{\text{ког}} \leq \mathcal{V} \leq 1$ – интерференционные полосы четко различимы).

Если положить $\mathcal{V}_{\text{ког}} = \frac{1}{2}$, то $b_{\text{ког}} \simeq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\Omega}$ ¹¹. Почему так можно сделать? Дело в том, что интерференционные полосы исчезают, если в некоторой точке P экрана с координатой x , геометрическая разность хода лучей, идущих от крайних точек источника равна $\frac{\lambda}{2}$ (максимумы интенсивности первой интерференционной картины накладываются на минимумы второй). Соответ-

¹¹Для выбранной геометрии опыта юнга $b_{\text{ког}} \simeq 0.4286$ мм

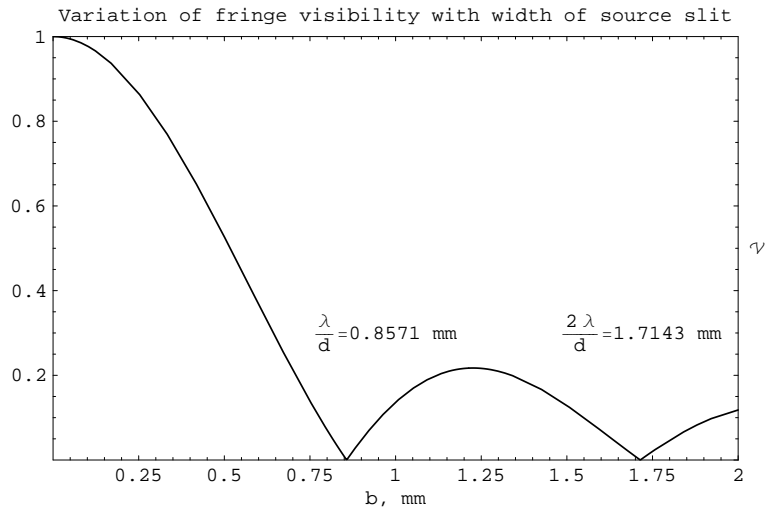


Рис. 17: Видность интерференционной картины от протяженного источника света с однородным распределением интенсивности.

ственно разность фаз (155), соответствующая крайним точкам протяженного источника не превышает π

$$(163) \quad \delta(b_{\text{ког}}, \Omega) = \frac{2\pi}{\lambda} \Omega b \lesssim \pi.$$

Полагая $\mathcal{V} = 0$ для $b \geq b_{\text{ког}}$ получим, что при выполнении условия

$$(164) \quad b\Omega \lesssim \frac{\lambda}{2}$$

излучение протяженного источника света можно считать когерентным. Это означает, что

протяженный линейный источник монохроматического света размером b можно свести к точечному источнику света лишь по отношению к излучению, заключенному в пределах угла $\Omega_{\text{ког}}$, причем

$$(165) \quad \Omega_{\text{ког}} \lesssim \frac{\lambda}{2b}.$$

6.3.1 Ширина и угол пространственной когерентности

Ширина когерентности, — расстояние по фронту волны, на котором излучение в различных точках фронта в один и тот же момент времени может считаться когерентным.

Пусть размер реального источника света b является постоянной заданной величиной. Тогда видность \mathcal{V} нужно рассматривать как функцию расстояния между центрами щелей d , или базы интерферометра Юнга. Эта зависимость изображена на рис. 18.

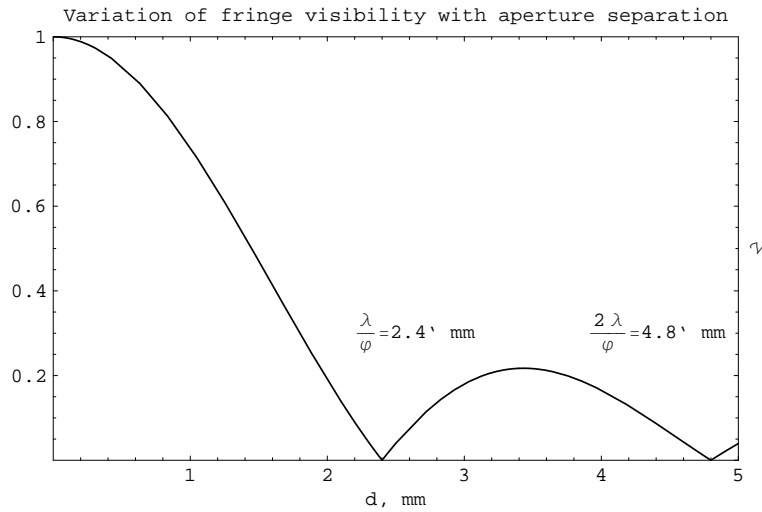


Рис. 18: Видность интерференционной картины от протяженного источника как функция расстояния d между центрами щелей интерферометра Юнга.

Согласно условию когерентности (164) интерференционная картина достаточно контрастная, если

$$(166) \quad d \lesssim \frac{1}{2} \frac{\lambda l}{b} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\varphi} \quad \text{или} \quad \varphi \lesssim \frac{\lambda}{2d}.$$

Поэтому расстояние

$$(167) \quad d_{\text{ког}} = \frac{\lambda l}{2b},$$

отсчитываемое по фронту волны, есть не что иное как ширина пространственной когерентности.

Угол пространственной когерентности $\varphi_{\text{ког}}$ определяется как максимальный размер источника, излучение которого можно считать когерентным. Поскольку $b \ll l$, то угол когерентности можно записать в виде

$$(168) \quad \varphi_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{2d_{\text{ког}}} = \frac{b}{l}.$$

Физический смысл этих величин следующий: излучение некогерентного протяженного монохроматического источника можно считать когерентным на поперечнике, эффективный диаметр которого по порядку величины равен ширине пространственной когерентности. При этом источник излучения из центра этого поперечника виден под углом пространственной когерентности.

6.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Поскольку когерентного излучения физических источников света, для которых $\mathcal{V} = 1$ не существует, существует несколько значений $\mathcal{V}_{\text{ког}}$,

соответствующего удовлетворительной контрастности. Оцените численно величину радиуса и угла пространственной когерентности для следующих значений

$$\mathcal{V}_{\text{ког}} = 0.9; \quad \frac{\pi}{4}; \quad \frac{1}{e},$$

полагая, что $b = 0.25$ мм, $d = 0.7$ мм, $l = 1$ м, $\lambda = 600$ нм.

2. Оцените число интерференционных полос, которые видны на экране в интерферометре Юнга. На каком расстоянии от центра интерференционной картины интерференционные полосы размываются?
3. На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи от Солнца. При каком расстоянии d между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы? Угловой размер Солнца 0,001 рад.
4. Какому условию должны удовлетворять размеры источника света, чтобы могли наблюдаться интерференционные полосы в установках с 1) зеркалами Френеля и 2) зеркалом Ллойда?

7 Лекция №7 "Интерференция квазимонохроматического света"

Интерференция, осуществляемая делением амплитуды. Время и длина когерентности. Квазимонохроматический свет. Условие временной когерентности.

Цель лекции —

7.1 Интерференция, осуществляемая делением амплитуды

В прошлой лекции мы говорили о том, что на когерентность волн характеризует их согласованность как во времени, так и в пространстве. Временная когерентность связаны с тем, что свет, излучаемый реальными источниками света, вообще говоря, немонохроматический.

Далее, для того чтобы выполнить условие пространственной когерентности в опыте Юнга, линейный размер протяженного источника света должен быть очень мал. Если размер источника не достаточно мала, то в этом случае требуется очень малая апертура интерференции. Очень малый угол раскрытия получается, когда в качестве вторичных волновых центров S_1 и S_2 используются два зеркальных изображения первичного источника S . В этом случае на видность интерференционных полос, т. е. их контраст, заметное влияние будет оказывать степень немонохроматичности излучения.

Рассмотрим следующий интерференционный опыт по **методу деления амплитуды**. Схема опыта изображена на рис. 19. Сильно расходящийся пучок света от **протяженного и квазимонохроматического** источника света S падает на плоскопараллельную пластинку, толщина которой равна $d \approx 0.04 \text{ мм}^{12}$. Расстояние B от лампы до пластинки составляет несколько сантиметров. На пластинке происходит *деление амплитуды световой волны* в результате отражения и преломления света. Вторичными волновыми центрами являются два изображения лампы S_1 и S_2 , которые находятся на расстоянии $D = 2d$ друг от друга. Интерференционная картина, имеющая вид концентрических колец, получается на экране, расположенном за лампой на расстоянии A (примерно несколько метров). При этом прямой свет от источника на экран не попадает.

Угол раскрытия пучков света от когерентных источников S_1 и S_2 равен

$$(169) \quad \sin \Omega = \frac{Z}{(A+B)/\cos \beta} = \frac{d}{A+B} \sin 2\beta,$$

где $Z = D \sin \beta$, а β обозначает угловой размер интерференционного кольца на проекционном экране. Радиус кольца $R = A \tan \beta$ может равняться нескольким метрам.

Так как выполняются условия

$$(170) \quad Z \ll (A+B) \simeq A,$$

¹²Яркая лампа и красный светофильтр $\lambda = 700 \text{ нм}$ с узкой полосой пропускания $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} < 1$

то

$$(171) \quad \Omega \approx \frac{h \sin 2\beta}{A} \simeq 10^{-6} \text{ рад.}$$

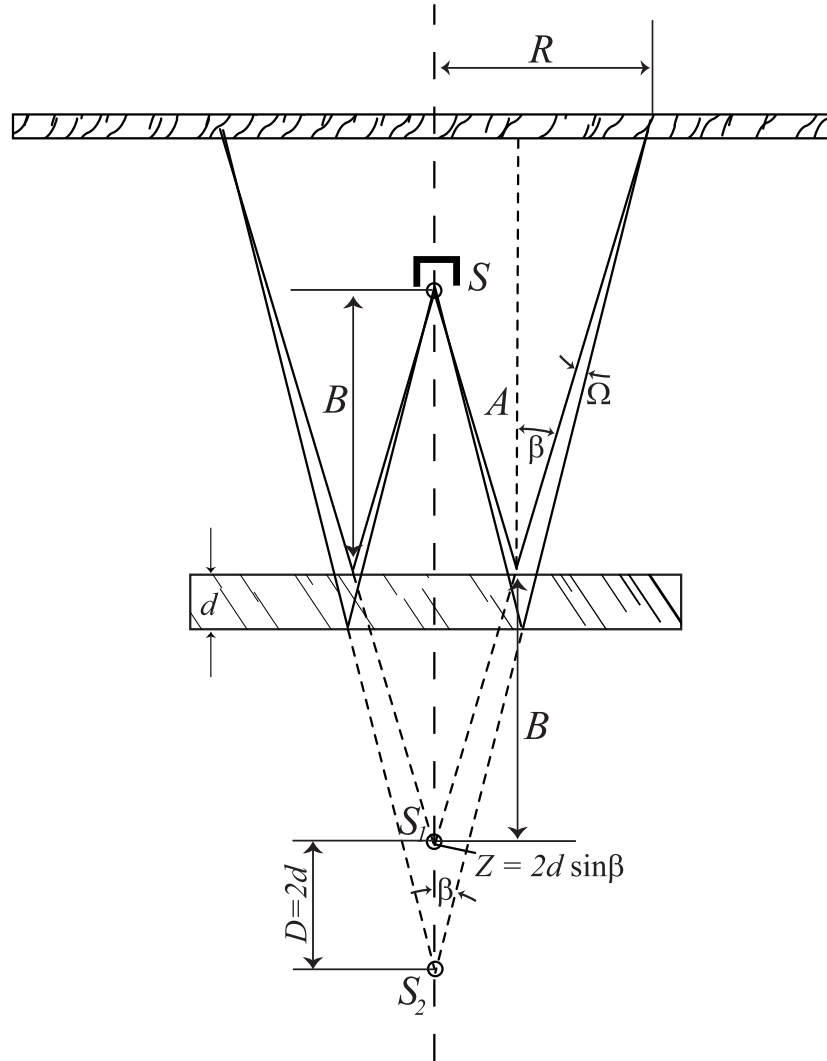


Рис. 19: Интерференционный опыт с плоскопараллельной пластиной. Зеркальные изображения S_1 и S_2 лампы S служат когерентными источниками. На экране проецируются кольцеобразные интерференционные полосы. Пропорции не соблюдены.

Ясно, что протяженный источник света размер, которого составляет несколько сантиметров, в данных условиях ведет себя как точечный.

Пусть светлomu интерференционному кольцу отвечает порядковое число n , определяющее геометрическую разность хода лучей $\Delta s = n\lambda$. Тогда найдем, что

$$(172) \quad \cos \beta = \frac{\Delta s}{D} = \frac{n\lambda}{2d}.$$

Получается, что уменьшающимся значениям n соответствуют увеличивающиеся значения угла β , т. е. интерференционные кольца больших радиусов соответствуют меньшим порядкам интерференции. Внутреннему кольцу соответствует наибольший порядок

$$(173) \quad N_{\max} = \frac{2h}{\lambda} \cong 10^3!$$

Если бы источник света был строго монохроматический, то уменьшение видности для внутренних, или соответственно при увеличении геометрической разности хода, не наблюдалось бы. Причина размывания полос в данном опыте связана с тем, что свет, излучаемый первичным источником S не является монохроматическим.

7.2 Время и длина когерентности

Пусть излучение источника S состоит из двух близких спектральных линий с длинами волн λ и $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ и одинаковой интенсивности. Так происходит при наблюдении интерференции в свете D -линии паров Na , излучение которого представляет собой спектральные линии с $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ и $\lambda' = 5896 \text{ \AA}$, или в свете зеленой линии паров ртути с длиной волны $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ и шириной $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$.

Центру интерференционной картины соответствует точки, где геометрическая разность хода лучей $\Delta s = 0$. В центр лучи света с различной длиной волны приходят с одинаковой фазой. При смещении от центра происходит постепенное смещение полос разного цвета друг относительно друга. Это происходит вследствие того, что согласно формулам (146) Лекции №5, положение максимумов и минимумов прямо пропорционально длине волны излучения. Если для данной точки P , соответствующей на экране некоторому порядку интерференции N , выполняются условия

$$(174) \quad \Delta s = N\lambda', \quad \Delta s = (N + \frac{1}{2})\lambda,$$

то в окрестности этой точки интерференционная полоса пропадет. Таким образом, условие первого исчезновения интерференционных полос имеет следующий вид

$$(175) \quad N = \frac{\lambda}{2(\lambda' - \lambda)} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

По мере возрастания порядка интерференции будет наблюдаться периодическая смена контрастности полос от максимального значения видности до минимального. Так, условие второго исчезновения $N' = 2N$.

Если предположить, что спектр источника света равномерен по полосе $\Delta\lambda$, то максимально возможный порядок интерференции немонохроматического света с заданной длиной волны и шириной определяется степенью монохроматичности света

$$(176) \quad N_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Это условие имеет простую физическую интерпретацию: интерференционная картина исчезает при совпадении максимума $(N + 1)$ -го порядка для

длины волны λ с максимумом N -го порядка для длины волны λ' . Данному значению N_{\max} отвечает максимально возможная разность хода

$$(177) \quad \Delta s_{\max} = N_{\max} \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \equiv L_{\text{ког}},$$

которая называется **длиной когерентности**. Время, за которое свет проходит этот путь, называется **временем когерентности**

$$(178) \quad \tau_{\text{ког}} = \frac{L_{\text{ког}}}{c}.$$

С помощью полученных формул можно оценить предельную толщину пластинки в описанном выше интерференционном опыте. В направлении, определяемом углом β , интерференционная картина будет размыта при условии, что разность хода, сходящихся на экране лучей, равна длине когерентности излучения. Тогда толщина пластинки не должна превышать по порядку величины

$$(179) \quad h \lesssim \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}.$$

7.3 Квазимонохроматический свет

Если мы говорим о монохроматическом свете, то имеем в виду ЭМ излучение одной определенной и строго постоянной частоты. Происхождение термина монохроматический свет связано с тем, что различие в частоте воспринимается человеком как различие в цвете.

Мы представляем монохроматический свет как гармоническое колебание, происходящее с неизменной амплитудой и частотой в течение бесконечно долгого промежутка времени. Однако понятие монохроматический свет является физической идеализацией, так как процессы излучения всегда ограничены во времени. Естественный свет есть сумма некоторого числа монохроматических волн со случайными амплитудами, частотами, фазами и поляризацией. Поскольку идеального монохроматического излучения нет, то монохроматическим считается излучение с узким спектральным интервалом, который можно приближенно характеризовать одной частотой (несущей частотой).

Спектр испускания газообразного вещества линейчатый: состоит из отдельных спектральных линий. В этом случае свет излучают атомы, которые практически не взаимодействуют друг с другом. Каждая линия соответствует переходу электрона из состояния атома с энергией E_n в состояние с энергией E_m . При этом испускается фотон, частота которого равна

$$(180) \quad \omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar},$$

где $\hbar = h/(2\pi)$ и h – постоянная Планка. Таким образом, излучаемый свет имеет вполне определенную частоту.

В действительности при квантовом переходе излучаются фотоны различных частот. Это связано с тем, что энергия возбужденного состояния

E_n не имеет вполне определенного значения. Другими словами, возбужденный энергетический уровень имеет некоторую **естественную ширину**. В классической интерпретации естественная ширина линии излучения обуславливается тем, что в возбужденном состоянии атом пребывает в течение малого времени τ . Это время называется **временем жизни** атома на энергетическом уровне. Это время характеризует продолжительность времени излучения атома, т. е. получается, что излучение изолированного атома можно представить в виде пуга волн с длиной $L = c\tau$.

Получим формулу связи между шириной линии излучения и продолжительностью времени излучения атома. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени жизни состояния в квантовой механике

$$(181) \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h,$$

энергия дискретного уровня E_n может иметь любое значение в интервале $E_n + \Delta E$ и $E_n - \Delta E$. Поэтому излучение отдельной спектральной линии соответствует интервалу частот

$$(182) \quad \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \geq \frac{2\pi}{\tau}.$$

Эта формула показывает, что чем меньше время излучения, тем больше ширина линии излучения. Строго монохроматическое излучение возможно лишь при бесконечно большом времени излучения. А это возможно только для строго стационарного состояния, у которого $\Delta E = 0$.

Значение $\Delta\omega$ в формуле (182) определяет степень монохроматичности данной спектральной линии. Если ширина линии очень мала, то волну можно считать монохроматической с частотой равной средней частоте немонахроматической волны. Это выполняется при условии, что

$$(183) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1.$$

Это условие называется **условием квазимонохроматичности**. Приборы, с помощью которых из естественного излучения выделяют узкие спектральные интервалы, называются **монохроматорами**. Чрезвычайно высокая монохроматичность характерна для излучения некоторых типов лазеров. Ширина спектрального интервала излучения достигает величины $\Delta\lambda = 10^{-6}$ Å, которая значительно уже, чем ширина линий атомных спектров.

7.4 Условие временной когерентности

При интерференции строго монохроматического света видность интерференционной картины не должна уменьшаться при увеличении разности хода лучей. Наблюдающееся ухудшение видимости полос связана с конечным временем и длиной когерентности излучения, испускаемым реальным источником света.

Если интерпретировать световую волну с конечным временем и длиной когерентности как синусоидальную определенной частоты и конечной

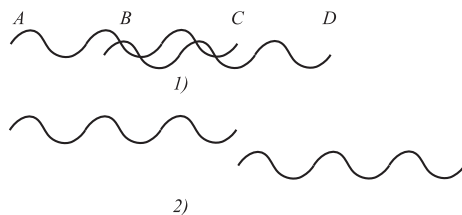


Рис. 20: Суперпозиция конечной длины цугов волн.

продолжительности, то получается следующее. Интерференция квазимонохроматического света возникает, т. е. интерференционное слагаемое I_{12} в формуле (134) Лекции №5 только за счет перекрывающихся участков цугов волн. На рис. 20, 1 это отрезок BC . Длина участка BC соответствует разности хода интерферирующих волн. Когда разность хода становится столь большой, что цуги не перекрываются, интерференционная картина исчезает, — суммарная интенсивность приближается к сумме интенсивностей двух интерферирующих волн.

Таким образом, временная когерентность связана с запаздыванием одного цуга волн по сравнению с другим. Поэтому

с квазимонохроматической волной можно обращаться как с монохроматической в течение промежутка времени, меньших времени когерентности

(184)
$$t \leq \tau_{\text{ког.}}$$

Или, интерференционная картина размывается полностью при разности хода лучей равной длине когерентности

(185)
$$\Delta s_{\text{max}} \leq L_{\text{ког.}}$$

Это условие называется условием **временной когерентности**.

7.5 Вопросы для самостоятельной работы

1. Выведите формулу (169).
2. Известно, что интерференцию можно наблюдать не только в падающем, но и проходящем свете. Предложите возможную схему интерференционного опыта с источником света и плоскопараллельной пластинкой. Какие световые лучи будут при этом интерферировать друг с другом? Опыт показывает, что минимумы не так темны, как в случае падающего света. Почему?
3. Рассчитайте время и длину когерентности излучения для красной линии $\lambda = 630$ нм гелий-неонового лазера. Ширина линии равна $\Delta\lambda = 10^{-3}$ нм.
4. Оцените степень монохроматичности белого (солнечного) света.

8 Лекция №8 "Принцип Гюйгенса–Френеля"

Формулировка принципа. Вычисление амплитуды волны. Примеры.

При внимательном рассмотрении на пятнышко света, прошедшего через узкое круглое отверстие, можно заметить, что его граница окружена чередующимися темными и светлыми кольцами. Они возникают за счет дифракции света на краях отверстия. **Явление дифракции света**, или огибания ЭМ волнами препятствий, в результате которого световая волна проникает в область геометрической тени, присуще любому волновому движению. Однако из-за малости длины волны света наблюдать дифракцию света в обычных условиях не просто. Волны заметным образом огибают препятствия, если геометрические размеры препятствия сравнимы с длиной волны.

8.1 Формулировка принципа

Задачи по расчету дифракционной картины, возникающей при огибании света препятствий, являются наиболее трудными в оптике. Всякая дифракционная задача сводится к нахождению решения дифференциальных уравнений Максвелла, удовлетворяющего определенным граничным условиям. В рамках настоящего курса "Оптики" мы рассмотрим приближенные методы расчета, используемые в волновой теории дифракции. Один из таких методов развит на основе **принципа Гюйгенса–Френеля**. Идея принципа следующая: *интерференция излучения от вторичных источников участка волнового фронта приводит к возникновению дифракции.*

Формулировка принципа. Для того чтобы вычислить амплитуду световой волны в любой точке пространства, надо мысленно окружить первичный источник света замкнутой поверхностью. Далее поверхность разбивают на множество маленьких участков (площадок), которые можно рассматривать как вторичные источники света. Амплитуды и фазы колебаний во вторичных источниках определяются амплитудой и фазой волны от первичного источника. Интерференция вторичных световых волн будет определять амплитуду и фазу колебания в рассматриваемой точке пространства.

Рассмотрим модель, объясняющую как свет, испущенной источником, попадает в произвольную точку пространства P . Пусть в точке P_0 , см. рис. 21, находится точечный источник монохроматического света. Будем считать, что среда оптически однородная и изотропная. Пусть сферическая поверхность Σ радиуса a будет обозначать волновой фронт в некоторый момент времени. Поскольку волна сферическая, на расстоянии a от источника напряженность равна

$$(186) \quad \frac{E_0}{a} e^{-i(\omega t - ka)},$$

где E_0 – амплитуда на единичном расстоянии и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Напряженность вторичной световой волны от малого участка Q волновой поверхности в точке P прямо пропорциональна амплитуде первичной волны и площади

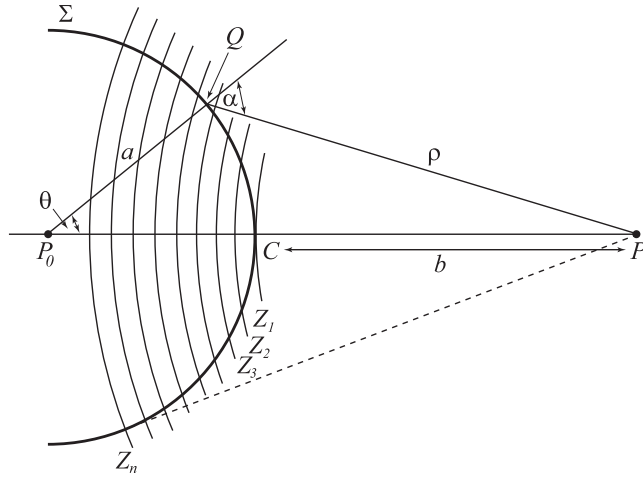


Рис. 21: Построение зон Френеля.

$d\sigma$ этого элемента

$$(187) \quad dE(P) = K(\alpha) \frac{E_0}{a} e^{-i(\omega t - ka)} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} d\sigma$$

где коэффициент пропорциональности $K(\alpha)$ учитывает неизвестную зависимость амплитуды вторичной волны от угла между нормалью к волновой поверхности в точке Q и направлением QP , $|QP| = \rho$. Этот угол называется **углом дифракции**. Согласно предположения О. Ж. Френеля коэффициент K принимает максимальное значение вдоль оси распространения волны, т. е. для $\alpha = 0$, и обращается в нуль для тех участков поверхности, для которых $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. Результирующая напряженность в точке P определяется частью волнового фронта, которая не закрыта препятствием, расположенным на пути распространения волны

$$(188) \quad E(P) = \frac{E_0 e^{-i(\omega t - ka)}}{a} \int_{\Sigma} d\sigma \frac{e^{ik\rho}}{\rho} K(\alpha).$$

Зоны Френеля. Для вычисления интеграла в формуле (188) существует простой и наглядный метод, называемый **методом зон Френеля**. Проведем следующее графическое построение, изображенное на рис. 21. Будем считать, что радиус волнового фронта много больше длины волны $a \gg \lambda$. Расстояние от точки P до ближайшей точки C на волновой поверхности равно b . Далее разобьем поверхность Σ на кольцевые зоны Z_1, Z_2, \dots, Z_n так, чтобы расстояния от краев соседних зон до точки P отличались на половину длины волны света

$$(189) \quad b, \quad b + \frac{\lambda}{2}, \quad b + \frac{2\lambda}{2}, \quad b + \frac{3\lambda}{2}, \quad \dots, \quad b + \frac{m\lambda}{2},$$

Преимущество подобного разбиения состоит в том, что для соответствующих точке Z_1, Z_2, \dots соседних зон разность хода лучей равна $\frac{\lambda}{2}$ и вторичные волны от них в точке P ослабляют друг друга.

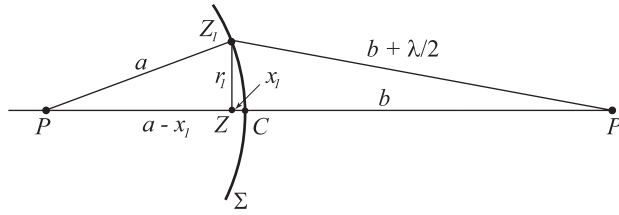


Рис. 22: Иллюстрация к вычислению радиуса и площади первой зоны Френеля.

Радиусы зон Френеля нетрудно вычислить и доказать, что их площади одинаковые. Согласно рис. 22 радиус r_1 первой зоны Френеля равен

$$(190) \quad r_1^2 = a^2 - (a - x_1)^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x_1)^2.$$

Так как $a \gg \lambda$ и $b \gg \lambda$, то найдем, что

$$(191) \quad x_1 = \frac{b\lambda}{2(a+b)} + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Радиус первой зоны Френеля равен

$$(192) \quad r_1 \cong \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}.$$

Аналогично для зоны с порядковым номером m нетрудно вычислить

$$(193) \quad x_m \cong \frac{\lambda bm}{2(a+b)}, \quad r_m \cong \sqrt{\frac{ab\lambda m}{a+b}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Площадь первой зоны Френеля равна площади сферического сегмента

$$(194) \quad \sigma_1 = 2\pi a x_1 = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Площадь второй зоны Френеля

$$(195) \quad \sigma_2 = 2\pi a x_2 - \sigma_1 = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Таким образом, площади зон равны.

8.2 Вычисление амплитуды волны

Теперь перейдем к непосредственному вычислению интеграла (188), разбивая волновой фронт на зоны Френеля. Из соображений симметрии двумерный интеграл по поверхности можно свести к одномерному. Из рис. 21 видно, что

$$(196) \quad \rho^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b) \cos \theta.$$

Тогда

$$(197) \quad \rho d\rho = a(a + b) \sin \theta d\theta.$$

Ясно, что площадь кольца, вырезанного из волнового фронта двумя близкими концентрическими сферами с центром в точке P равна

$$(198) \quad d\sigma = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\pi a}{a + b} \rho d\rho.$$

Тогда интеграл (188) сводится к

$$(199) \quad E(P) = \frac{2\pi E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka)} \underbrace{\int_b^{b+2a} d\rho K(\rho) e^{ik\rho}}_?$$

Вклад от отдельной зоны в результирующую амплитуду (199) можно оценить при помощи теоремы о среднем

$$(200) \quad E_m \leq \frac{2\pi E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka)} K_m \int_{b+(m-1)\lambda/2}^{b+m\lambda/2} d\rho e^{ik\rho},$$

где K_m обозначает среднее значение коэффициента K по зоне Френеля с номером m . Результат дальнейшего вычисления можно представить в виде

$$(201) \quad E_m(P) = -\frac{2\pi i}{k} \frac{E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka - kb)} e^{ikm\lambda/2} (1 - e^{-ik\lambda/2}) K_m.$$

Так как $k\lambda = 2\pi$, последних два множителя преобразуются к

$$(202) \quad e^{ikm\lambda/2} (1 - e^{-ik\lambda/2}) = e^{i\pi m} (1 - e^{-i\pi}) = (-1)^m 2.$$

Тогда

$$(203) \quad E_m(P) = 2i\lambda (-1)^{m+1} K_m \frac{E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - k(a+b))}.$$

Это выражение показывает, что вклады от соседних зон Френеля в результирующее колебание противоположны по знаку. Согласно принципу суперпозиции найдем

$$(204) \quad E(P) = 2i\lambda \frac{E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka - kb)} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} K_m.$$

Для приближенного вычисления ряда в формуле (204)

$$(205) \quad S = \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} K_m = K_1 - K_2 + K_3 - \dots + (-1)^{N+1} K_N$$

нужно принять еще одно дополнительное допущение: амплитуды колебаний в точке P монотонно убывает по мере увеличения угла дифракции

$$(206) \quad K_1 > K_2 > \dots K_N.$$

Для больших номеров зон Френеля амплитуда колебаний от вторичных источников пренебрежимо мала.

Перепишем выражение (254), разделяя коэффициенты от нечетных зон на равные части

$$(207) \quad S = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_1}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_1}{2} \right) + \dots$$

Будем считать, что благодаря монотонности убывания выполняется равенство

$$(208) \quad K_m = \frac{K_{m-1} + K_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражения в скобах (207) будут равны нулю. Если пренебречь действием последней зоны, то результирующее колебание в точке P равно

$$(209) \quad E(P) \cong i\lambda(K_1 \pm K_N) \frac{E_0}{a+b} e^{-i(\omega t - ka - kb)} \cong \frac{1}{2} E_1(P),$$

где знак "+" соответствует нечетному числу зон Френеля, а знак "-" — четному. Таким образом,

амплитуда результирующего колебания в точке P примерно равна половине амплитуды колебания, создаваемого центральной зоной Френеля. Распространение света в однородной среде происходит так, как если бы световой поток распространялся внутри узкого канала P_0P , т. е. по прямой.

Замечание. Малость длины волны света λ по сравнению с расстояниями a и b определяет прямолинейность распространения света. Если бы глаз мог воспринимать радиоволны, то точечный источник света на расстоянии нескольких метров от глаз казался бы светящимся шаром!

Отметим, что выражение (209) для амплитуды будет совпадать с выражением для амплитуды сферической волны, если

$$(210) \quad iK_1\lambda = 1, \quad \text{или} \quad K_1 = -\frac{i}{\lambda} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda}.$$

Пояснить полученный результат можно следующим образом. Множитель $e^{-i\pi/2}$ означает, что колебания первичной и вторичных волн отличаются по фазе на четверть периода. Множитель λ^{-1} в формуле (210) указывает на то, что амплитуды вторичных волн относятся к амплитуде первичной волны как $1 : \lambda$.

8.3 Примеры

Теперь рассмотрим такой случай. Пусть сферическая волна падает на непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие. Вопрос: чему будет равна интенсивность света в точке P на рис. 21. Ответ дает принцип Гюйгенса–Френеля, если предположить что

1. непроницаемые части экрана не являются источниками вторичных волн;
2. точки участка волнового фронта, не закрытого экраном, являются такими же источниками вторичных волн, какими они были бы при отсутствии непроницаемых частей экрана.

Таким образом, амплитуда волны в точке P есть суперпозиция волн, испускаемых зонами Френеля незакрытыми экраном. Пусть экран закрывает все, кроме половины первой зоны Френеля. Тогда получим, согласно формулам (203) и (204), полагая $m = 1$ и умножая на $\frac{1}{2}$, что

$$(211) \quad E(P) = i\lambda K_1 \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} = \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)}.$$

Амплитуда дифрагированной волны, и соответственно интенсивность, равна амплитуде "свободной" волны, т. е. в отсутствии экрана. Если открыта только первая зона Френеля, то

$$(212) \quad E(P) = 2i\lambda K_1 \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} = 2 \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)}$$

и интенсивность волны $I(P) \sim |E(P)|^2$ в четыре раза превышает интенсивность волны при отсутствии экрана. Далее, если будут открыты первая и вторая зоны Френеля, то амплитуда $E(P) \simeq 0$. Это происходит потому, что вклады соседних зон компенсируют друг друга. Все эти выводы согласуются с экспериментом.

Из рассуждений о методу зон Френеля возникает необходимость появления светлого пятна (максимума) в случае, если на пути волны стоит непрозрачный круглый экран, размеры которого таковы, что он закрывает только первую зону Френеля. Согласно формуле (204),

$$(213) \quad E(P) = 2i\lambda \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} [-K_2 + K_3 - K_4 + \dots].$$

Сумма коэффициентов в квадратных скобках равна $\frac{-K_2}{2}$ и, следовательно,

$$(214) \quad E(P) \approx -i\lambda \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} K_2$$

Поскольку величина K_2 практически сопоставима с величиной $K_1 = \frac{1}{i\lambda}$, то за экраном в его тени на оси возникает светлое пятно. Это пятно называется **пятном Араго–Пуассона**.

8.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. В чем состоит физическое содержание принципа Гюйгенса–Френеля?
2. В чем заключаются трудности метода зон Френеля?
3. Вычислите радиусы зон Френеля и докажите, что их площади одинаковые.
4. Оцените площадь центральной зоны Френеля и поперечник канала распространения света, используя следующие данные $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ м, $r_0 \approx b \approx 1$ м.
5. Качественно объясните, как зависит интенсивность пятна Пуассона от расстояния до непрозрачного экрана?

9 Лекция №9 "Дифракция Френеля круглом отверстии"

Спираль Френеля. Дифракция на круглом отверстии. Зонная пластинка.

Для наглядной оценки результатов интерференции от зон Френеля пользуются графическим методом вычисления результирующей амплитуды. Результат сложения представляется векторной диаграммой, с помощью которой можно оценить результат дифракции на простых препятствиях в центре дифракционной картины.

9.1 Спираль Френеля

Результаты, полученные в Лекции №8 и представленные формулами (204) и (209), имеют главное значение в методе зон Френеля. Эти результаты можно наглядно интерпретировать с помощью векторной диаграммы.

Разобьем каждую зону Френеля на достаточно большое количество кольцевых участков, которые будем называть **подзонами**. Предположим, что амплитуды колебаний от каждой подзоны в точке наблюдения P изображаются вектором постоянной длины a . Колебания от крайних подзон зоны Френеля различаются по фазе на π радиан, так как разность хода лучей от этих участков равна $\frac{\lambda}{2}$. Отсюда следует, что разность фаз колебаний δ от соседних подзон должна быть равна $\delta = \frac{\pi}{N}$, где N — число подзон каждой зоны Френеля. Будем считать, что фазы волны, излучаемой первой подзоной центральной зоны Френеля за нуль.

Согласно принципу суперпозиции волновое возмущение, создаваемое, например, первой зоной Френеля, можно представить как результат действия когерентных световых колебаний, излучаемой ее подзонами. Математически задача формулируется следующим образом. Требуется найти амплитуду и фазу результирующего колебания, возникающего в результате сложения N когерентных колебаний одного направления, имеющих вид: $x_n = a \cos[\omega t + (n - 1)\delta]$, где n — номер колебания ($n = 1, 2, \dots, N$), δ — разность фаз колебаний между n и $n - 1$ колебаниями.

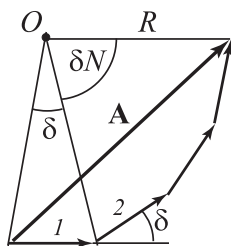


Рис. 23: Графическое вычисление амплитуды результирующего колебания.

На векторной диаграмме каждому колебанию, модуль которого равен a , сопоставим вектор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$. Из этих N векторов можно построить цепочку, обозначив результирующий вектор как \mathbf{A} . Если провести описанную

окружность радиуса R с центром в точке O , то из рис. 23 видно, что

$$(215) \quad A = 2R \sin \frac{\delta N}{2}, \quad a = 2R \sin \frac{\delta}{2}.$$

Исключив R , получим

$$(216) \quad A = a \frac{\sin \frac{\delta N}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Фазу результирующего колебания можно найти следующим образом (опуская временную зависимость колебаний)

$$(217) \quad \begin{aligned} E_1(P) &= a + ae^{i\delta} + ae^{i2\delta} + \dots + ae^{i(N-1)\delta} \\ &= a(1 + e^{i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}) \\ &= a \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} = a \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}} = A e^{+i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

На рис. 24, *a* построена векторная диаграмма колебаний для $N = 8$ для первых трех зон Френеля. В соответствии с рис. 23 колебания возбуждаемые в точке наблюдения P подзонами первой зоны Френеля, изображаются на диаграмме векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_8$, образующие ломанную линию. При

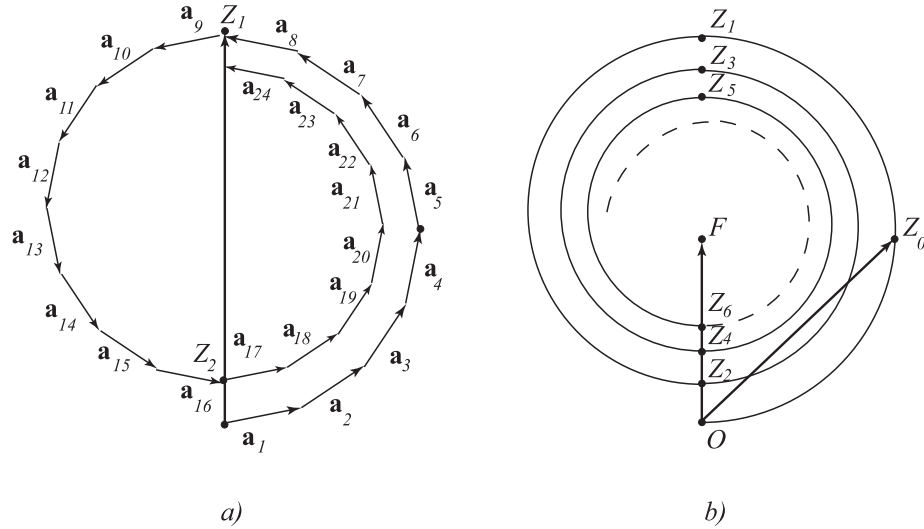


Рис. 24: Спираль Френеля.

переходе ко второй зоне Френеля мы должны учесть тот факт, что амплитуда a при удалении от точки наблюдения несколько уменьшается. Из-за этого ломанная кривая не замыкается. Если число подзон неограниченно увеличивать, то ломанная линия превратится в непрерывную спираль, которая обвивается вокруг фокуса F , см. рис. 24, *b*. Мы будем называть такую

спираль как **спираль Френеля**. Она позволяет определить амплитуду результирующего колебания в точке наблюдения P , расположенной в центре дифракционной картины, при открытии любого числа зон Френеля и их частей.

На рис. 24 отрезок $|OZ_0|$ пропорционален амплитуде при открытии внутренней половины первой зоны Френеля. Длина отрезков $|OZ_1|, |OZ_2|, \dots$ пропорциональна амплитудам при открытии первой, первой и второй и т. д. зон Френеля.

9.2 Дифракция на круглом отверстии

С помощью спирали Френеля можно оценить результат дифракции на круглом отверстии или круглой экране в центре дифракционной картины и определить ее вид.

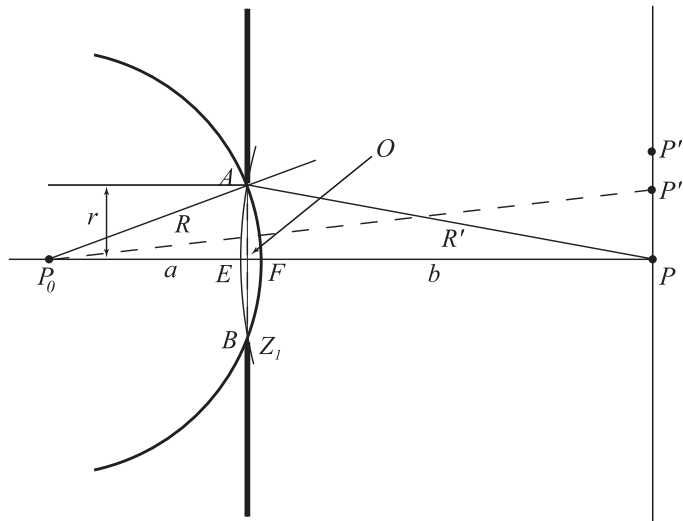


Рис. 25: Дифракция света на круглом отверстии.

Рассмотрим дифракцию на непрозрачном экране, в котором проделано круглое отверстие радиуса r , см. рис. 25. Найдем интенсивность света I за экраном в точке P , для которой отверстие: 1) равно первой зоне Френеля; 2) внутренней половине первой зоны; 3) сделали равным первой зоны Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)? Далее, 4) как будет меняться интенсивность дифракционной картины при удалении от центра P и 5) при расширении отверстия?

Пусть E_0 и I_0 обозначают амплитуду и интенсивность волны в точке P при свободном распространении волны, т. е. при отсутствии экрана. На рис. 25, b длина отрезка $|OF|$ пропорциональна E_0 . Действие непрозрачного экрана сводится к устранению той части волнового фронта, которую он закрывает. На действие открытой части волнового фронта влияние экрана не оказывает. Общий световой поток пропорционален площади поверхности

отверстия. Однако вследствие интерференции вторичных световых волн от участков открытой части волнового фронта будет происходить либо усиление, либо ослабление результирующей интенсивности света на оси P_0P распространения пучка.

Оценить интенсивность света в центре дифракционной картины в зависимости от радиуса отверстия можно следующим способом. Построим сферу с центром в точке P_0 , где расположен источник света, так чтобы она проходила через края отверстия AB . Выбрав точку наблюдения, построим зоны Френеля и подсчитаем сколько зон укладывается в отверстии.

1. Если экран открывает центральную зону Френеля, то амплитуда колебания света в точке наблюдения пропорциональна отрезку $|OZ_1| = 2|OF|$ на рис. 24, b , т. е. $E \simeq 2E_0$, $I \simeq 4I_0$. Таким образом, интенсивность I в центре P дифракционной картины оказывается в четыре раза большей, чем было бы при свободном распространении волны.
2. Если отверстие равно внутренней половине первой зоны, то амплитуда колебания $E(P)$ пропорциональна отрезку $|OZ_0|$ спирали Френеля, т. е. $E \simeq \sqrt{2}E_0$, $I \simeq 2I_0$. Таким образом, интенсивность I в центре P дифракционной картины оказывается в два раза большей, чем было бы при свободном распространении волны.
3. Если половину отверстия, которое равно первой зоне Френеля, закрыли по диаметру, то амплитуда колебания $E(P)$ пропорциональна отрезку $|FZ_0|$ спирали Френеля, т. е. $E \simeq E_0$, $I \simeq I_0$. Таким образом, интенсивность I в центре P дифракционной картины оказывается равной интенсивности света при свободном распространении волны.
4. Характер дифракционной картины можно выяснить следующим образом. Поместим в точке P проекционный экран параллельный преграде с отверстием. Если мы сместимся из точки P в точку P' , то прямая P_0P' не будет осью симметрии экрана с отверстием. В этом случае частично будет открываться вторая зона Френеля, и по мере увеличения расстояния от оси симметрии P_0P разность хода между самой близкой и дальней точками на открытом отверстии фронте волны может стать равной $\frac{\lambda}{2}$. Таким образом, из-за интерференции вторичные волны будут компенсировать друг друга. Из соображений симметрии ясно, что множество таких точек будет представляться темным кольцом с центром в точке P . Далее, понятно, что вокруг темного кольца должно возникнуть светлое кольцо, например при смещении в точку P'' . Поэтому дифракционная картина от круглого отверстия представляет собой чередование концентрических светлые и темные колеи (с центром в точке P). Диаметр первого темного кольца будет несколько превышать диаметр отверстия. Из-за дифракции свет должен проникать в область геометрической тени, т. е. огибать препятствие.
5. Если увеличить радиус отверстия r , то при открытых двух первых зон Френеля в точке P наблюдается минимум интенсивности, так как действия первой и второй зоны практически полностью компенсируют друг друга. На спирали Френеля одновременной действие двух первых зон Френеля пропорционально отрезку $|OZ_2|$, длина которого очень

мала (по сравнению с длиной отрезка $|OZ_1|$). Если число открытых зон равно трем, то интенсивность света в точке P будет такой же, как получилось бы, если бы была открыта только третья зона Френеля. На рис. 24, b , совокупное действие трех зон Френеля пропорционально длине отрезка $|OZ_3|$. Всегда при четном числе открытых зон Френеля в точке P будет наблюдаться минимум (отрезки $|OZ_4|, |OZ_6|, \dots$), а при нечетных — максимум (отрезки $|OZ_3|, |OZ_5|, \dots$). Поскольку зоны с большим номером вносят меньший вклад в результирующее колебание (из-за большего угла дифракции), при большом числе зон, укладываемых в отверстие непрозрачного экрана, заметного влияния на интенсивность света на оси пучка экран оказывать не будет.

9.3 Зонная пластинка

Подтверждением соответствия рассуждений Френеля реальным процессам служат опыты с **зонной пластинкой**, — экран с чередующимися светлыми и темными кольцами. Радиусы колец выбраны так, что при данных a, b и λ кольца закрывают все четные (или, напротив, нечетные) зоны Френеля, оставляя открытыми нечетные (или четные).

Количество зон Френеля, укладываемых в круглом отверстии (его диаметр равен $d = 2r$) непрозрачного экрана, можно определить при помощи следующих геометрических построений, см. рис. 25. Расстояния $|P_0O| = a$ и $|OP| = b$. Пусть R обозначает радиус сферы с центром в точке P_0 , которая проходит через края отверстия A и B . Точка O отмечает середину хорды AB . Стрела OF сегмента равна

$$(218) \quad \frac{d}{2} = \sqrt{OF(2R - OF)} = \sqrt{OF(2(a + OF) - OF)} \cong \sqrt{2aOF}.$$

Если построить сферу с центром в точке P , так чтобы она касалась края отверстия, то аналогично найдем

$$(219) \quad \frac{d}{2} = \sqrt{OE(2R' - OE)} = \sqrt{OE(2(a + OE) - OE)} \cong \sqrt{2bOE}.$$

Далее для расстояния EF получим

$$(220) \quad EF = EO + OF = \frac{d^2}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Число зон Френеля, укладываемых в отверстии будет равно целой части от

$$(221) \quad m = \frac{EF}{\lambda/2} = \frac{d^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Следовательно радиус внешнего края зоны Френеля будет равен

$$(222) \quad r_m = \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda.$$

Используя эту формулу можно прийти к заключению, что внутренним и внешние радиусы колец зонная пластинки соотносятся друг с другом в пропорции

$$(223) \quad 1 : \sqrt{3} : \sqrt{5} \quad \text{и} \quad 1 : \sqrt{2} : \sqrt{4}$$

Зонная пластинка со светлым центром удаляет все четные зоны, а пластинка с темным центром – все нечетные.

Пластинка фокусирует лучи как линза. С ее помощью можно создавать и изображения предметов (достаточно низкого качества). Это видно, если формулу (221) записать в виде формулы тонкой линзы

$$(224) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{d^2}{4m\lambda} = \frac{r_m^2}{m\lambda}.$$

Зонную пластинку используют в рентгеновских микроскопах, разрешающая способность которых намного превышает разрешение оптических.

9.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. С помощью спирали Френеля рассмотрите дифракцию Френеля на круглом экране. Объясните следующий парадоксальный результат: если экран достаточно мал, то в центре дифракционной картины должно быть светлое пятно. Какой вид будет иметь дифракционная картина в этом случае?
2. Монохроматическая плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск. Рассмотрите дифракцию Френеля, если диск закрывает для точки наблюдения P первую зону Френеля. Какова интенсивность света I в точке P после того, как у диска удалили: 1) половину (по диаметру); 2) половину внешней половины первой зоны Френеля (по диаметру)?
3. Оцените размер круглого отверстия, на котором наблюдается дифракция Френеля, если расстояние от источника до экрана и от экрана до точки наблюдения равно порядку метра.

10 Лекция №10 "Дифракция Френеля на прямолинейном крае"

Зоны Шустера и спираль Корню. Дифракция на прямолинейном крае. Условие наблюдения дифракции Френеля.

Цель лекции — рассмотреть дифракцию Френеля от прямолинейного края экрана или узкой длинной щели. Эти задачи представляют физический интерес в связи вопросом о поведении световой волны вблизи края геометрической тени.

10.1 Зоны Шустера и спираль Корню

Для решения дифракции на прямоугольной щели или на прямолинейном крае экрана удобно разбивать волновой фронт не на *кольцеобразные зоны*, или *зоны Френеля*, а на *полосатые зоны*, или *зоны Шустера*.

Рассмотрим на процесс распространения плоской волны с точки зрения принципа Гюйгенса–Френеля. Пусть плоская волна, волновой фронт AB перпендикулярен плоскости рис. 26, распространяется вдоль оси X . Разобьем фронт плоской волны AB на полосатые зоны. Для этого постро-

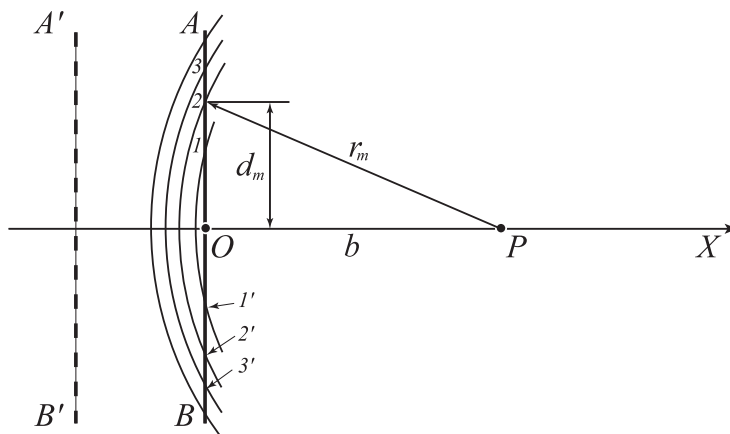


Рис. 26: Зоны Шустера.

им цилиндрические коаксиальные поверхности, радиусы которых равны

$$(225) \quad r_m = b + m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Ось цилиндров проходит через точку наблюдения P перпендикулярно плоскости рис. 26. В результате такого разбиения волновой фронт разобьется на прямоугольные полосы, называемые **зонами Шустера**. Ось, проходящая через точку O , делит центральную зону на две части. Зоны, находящиеся выше точки O имеют номера 1, 2, 3 и т. д., а зоны, находящиеся ниже — номера 1', 2', 3' и т. д. Ясно, что так как ширина (и площадь) зон с номером

m и m' одинаковая, поэтому световые колебания, которые они создают в точке P имеют одинаковую амплитуду и фазу.

Докажем, что ширина полосатых зон монотонно убывает и в пределе $r \rightarrow \infty$ стремится к $\frac{\lambda}{2}$. Заметим, что поскольку $\lambda \ll b$, то квадрат расстояния от точки P до дальней границы зоны Шустера с номером m равен

$$(226) \quad d_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2 = bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} \simeq bm\lambda.$$

Суммарная ширина первых N зон равна

$$(227) \quad d_1 + d_2 + \dots + d_N = \sqrt{\left(b + N \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} \approx \sqrt{bN\lambda} = \sqrt{N}d_1.$$

Отсюда найдем, что ширины последовательных зон Шустера равны

$$(228) \quad h_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad h_2 = (\sqrt{2} - 1)h_1, \quad h_3 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})h_1, \quad \dots$$

Ясно, что ширина (и площадь) зон Шустера при удалении от центра фронта плоской волны сперва значительно убывают, а затем убывают монотонно

$$(229) \quad \begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2.41, & \frac{h_2}{h_3} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 1.3, \\ \frac{h_3}{h_4} &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{4} - \sqrt{3}} = 1.19, & \frac{h_4}{h_5} &= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} = 1.135, \quad \dots \end{aligned}$$

или

$$(230) \quad h_1 : h_2 : h_3 : h_4 : \dots = 1 : 0.41 : 0.32 : 0.27 : 0.24 \dots$$

Из формулы (187) Лекции №7 следует, что амплитуда вторичной световой

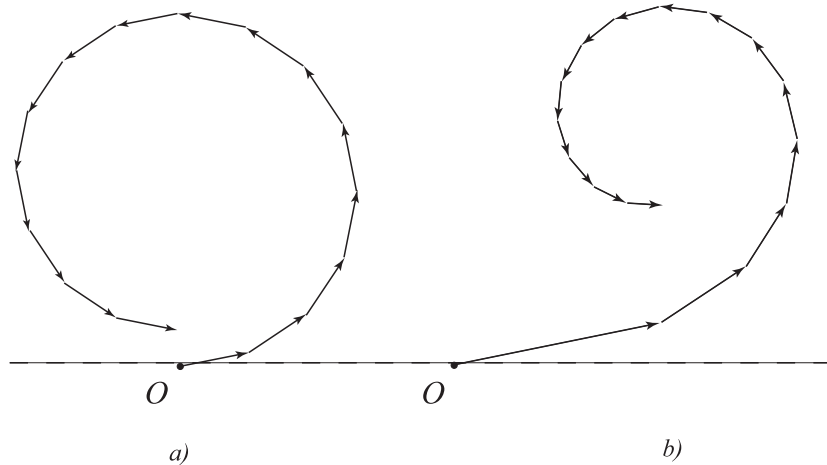


Рис. 27: Векторный диаграммы для а) зон Френеля и б) зон Шустера.

волны в точке P , излучаемой зонами Шустера, сперва (для первых) убывает очень быстро, а затем достаточно медленно. Таким образом, вклад в

результующую напряженность $E(P)$ определяется действием несколькими первыми десятками зон.

Для определения амплитуды результирующего колебания применим графический метод, см. рис. 27, *a* и *b*. Каждую зону Шюстера разобьем на узкие полоски (подзоны). Колебание, создаваемое каждой подзоной в точке P , будем изображать на векторной диаграмме вектором. На рис. 27, *a* изображена векторная диаграмма для кольцевых зон, а на рис. 27, *b* — для полосатых зон, лежащий выше точки O . Отставание по фазе каждого следующего колебания в обоих случаях одинаково и равно $\alpha = \frac{\pi}{n}$, где n — количество подзон (рис. 27 выполнен для $n = 8$). Различие между этими векторными диаграммами состоит в следующем. Разбивая кольцевую зону на подзоны, см. предыдущую Лекцию №9, мы получили, что амплитуды вторичных световых волн, испускаемых подзонами (в пределах одной зоны), равны. Поэтому вклад в результирующее колебание, вносимое отдельной зоной Френеля, изображается ломанной кривой, вокруг которой можно описать полуокружность. Радиус полуокружности при переходе к зоне Френеля с большим номером уменьшается, так как пропорционально уменьшается ее вклад в результирующее колебание.

Для зон Шюстера ситуация другая. Разность фаз колебаний α от соседних подзон по-прежнему постоянна, однако по формулам (229) величина амплитуды вторичных световых колебаний, испускаемых подзонами, убывает в соответствии с пропорцией (230). Поэтому ломанная линия, которая получается при графическом сложении векторов, получается именно такой, как это изображено на рис. 27, *b*.

На векторной диаграмме зоны с номерами m и m' будут располагаться симметрично относительно точки O . Устремляя ширину подзон к нулю, мы получим непрерывную кривую, называемую **спиралью Корню**. Кривая изображена на рис. 28. Она состоит из двух симметричных ветвей, которые

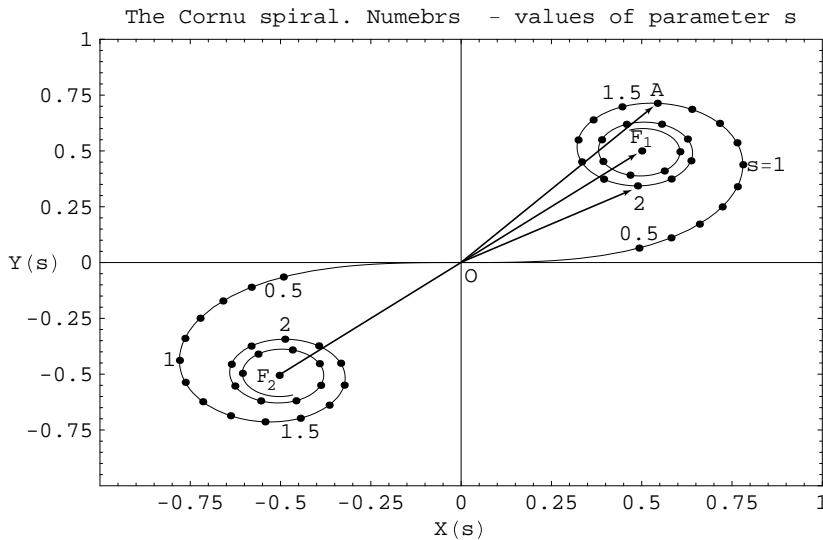


Рис. 28: Спираль Корню. Числа на спирали показывают значения параметра s .

обвиваются вокруг двух фокусов F_1 и F_2 . Верхняя ветвь спирали (участок OF_1) представляет действие верхней половины волнового фронта AB на рис. 26, а нижняя ветвь (участок F_2O) — нижней. Колебание возбуждаемое всем волновым фронтом соответствует вектору F_2F_1 . Колебание, возбуждаемое в точке P верхней частью первой зоны Шустера, соответствует вектору OA , первой и второй — вектору $O2$.

Уравнение спирали Корню может быть получено теоретически. Если координатные оси выбраны так, как показано на рис. 28, то в прямоугольных координатах уравнение спирали имеет вид

$$(231) \quad X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds, \quad Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds.$$

Эти интегралы называются **интегралами Френеля**. Их значение находится численными методами. Заметим, что

$$(232) \quad X(s) = -X(-s), \quad Y(s) = -Y(-s), \quad X(\infty) = Y(\infty) = 0.5.$$

Числа, отмеченные на спирали Корню, соответствуют значениям параметра s . Его величина определяет длину вектора

$$(233) \quad A = \sqrt{X(s)^2 + Y(s)^2},$$

проведенного из точки O в данную точку спирали с параметром s .

10.2 Дифракция на прямолинейном крае

С помощью спирали Корню можно решить задачу о дифракции Френеля на прямолинейном крае экрана. Рассмотрим плоскую волну, падающую на непрозрачную полуплоскость с прямолинейным краем, см. рис. 29. С по-

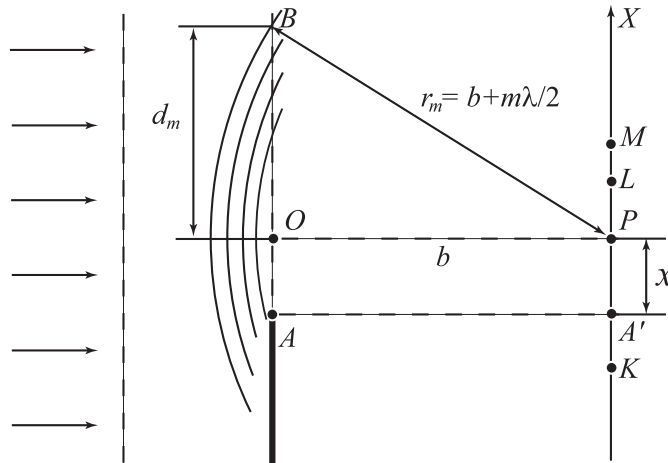


Рис. 29: Расчет зон Шустера при дифракции на прямолинейном крае полубесконечного непрозрачного экрана.

мощью спирали Корню найдем амплитуду светового колебания для точки P , находящейся на расстоянии x от края геометрической тени AA' экрана. Расчет амплитуды производится, считая, что точка O спирали соответствует рассматриваемой точке P . Искомые амплитуды изображены на рис. 30, $a-e$ для различных положений точки P на оси X . Для точки P , лежащей на границе геометрической тени (точка A') амплитуда светового колебания пропорциональна длине вектора OF_1 , рис. 30, a , так как все "штрихованные" зоны будут закрыты. При смещении точки P за границу геометрической тени (точка L) дополнительно к "штрихованным" зонам будут закрываться часть "нештрихованных" зон. Поэтому амплитуда колебания будет монотонно убывать, стремясь к нулю, рис. 30, b . Если точка P смещается вверх по оси X от геометрической тени, то дополнительно к "нештрихованным" зонам будут открываться "штрихованные" зоны. Поэтому необходимо учитывать левую часть спирали Корню.

Амплитуда возрастает, достигая первого максимума в точке L , рис. 30, c , и первого минимума в точке M , рис. 30, d . При дальнейшем движении к фокусу спирали F_2 амплитуда колебаний будет проходить максимумы и минимумы. При удалении от края геометрической тени на достаточно большое расстояние волновая поверхность будет полностью открытой. Соответствующая амплитуда пропорциональна длине вектора F_2F_1 , точно в два раза превышая амплитуду на границе геометрической тени, так как $|OF_1| = \frac{1}{2}|F_2F_1|$.

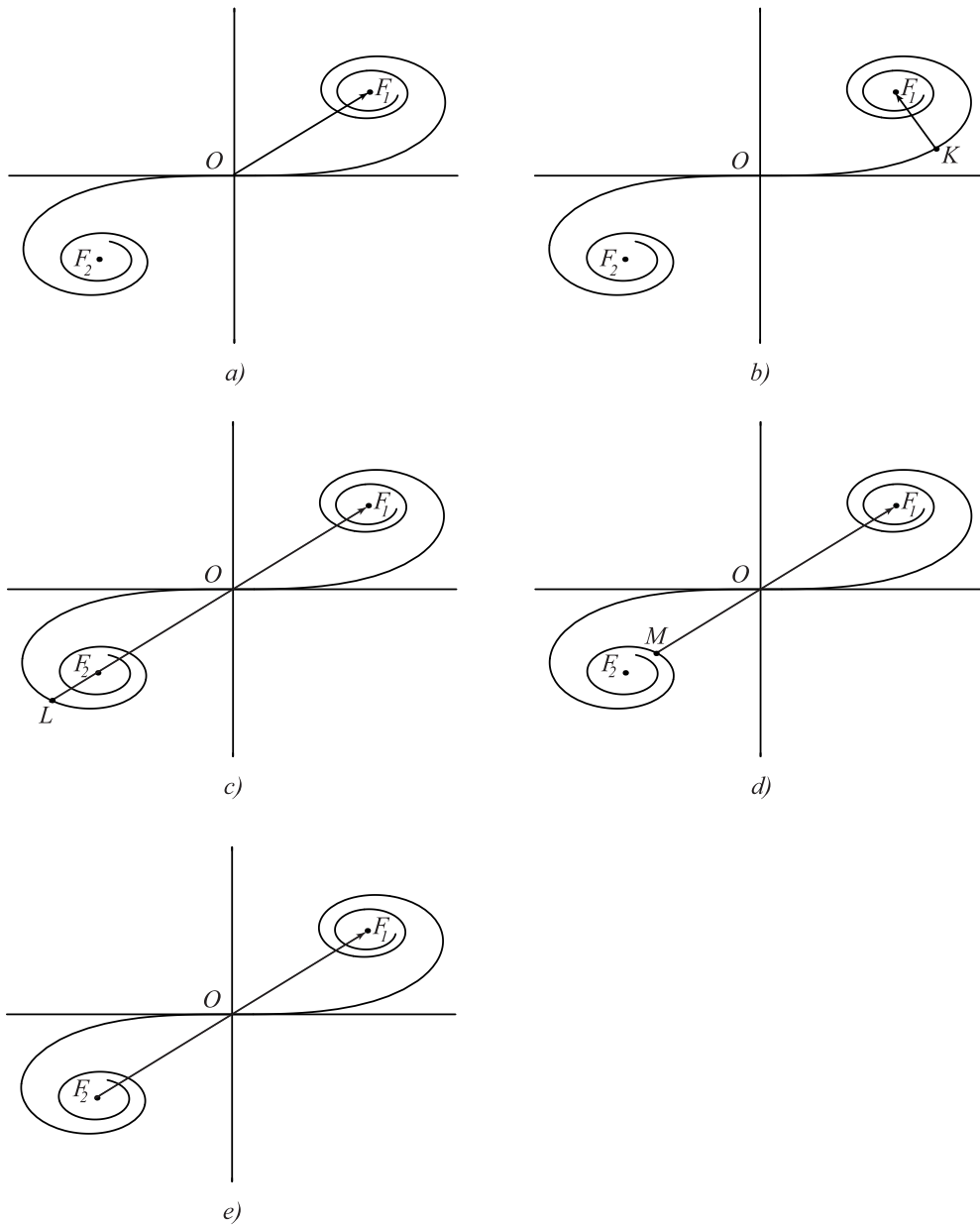


Рис. 30: К расчету амплитуды световых колебаний за полубесконечным непроницаемым экраном.

Распределение интенсивности дифракционной картины от прямолинейного края (для случая $\lambda = 600$ нм и $b = 1$ м), полученное с помощью спирали Корню¹³, показано на рис. 31. На этом рисунке видно, что нет резкой границы между светом и тенью в области геометрической тени, а освещенная область расщепляется в дифракционные полосы, параллельные краю экрана. Обозначим через $E_0 = |F_2 F_1|$ и $I_0 = E_0^2$ амплитуду и интенсивность

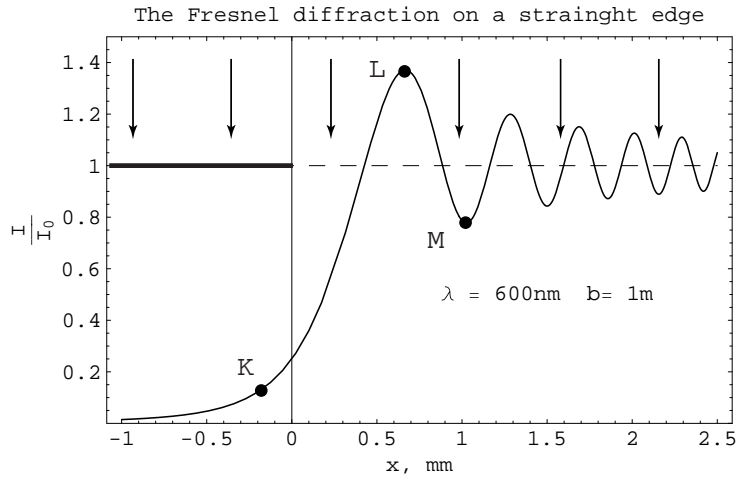


Рис. 31: Распределение интенсивности при дифракции Френеля на прямолинейном крае экрана.

плоской волны. Если точка P находится на краю геометрической тени, то амплитуда и интенсивность будут соответственно равны $\frac{1}{2}E_0$ и $\frac{1}{4}I_0$. С помощью спирали Корню можно определить интенсивности света в максимумах и минимумах. Например, в первом максимуме (точка L) и минимуме (точка M) соответственно равны $I = 1.37I_0$ и $I = 0.79I_0$.

10.3 Условие наблюдения дифракции Френеля

Понимание сути дифракции позволило разработать приближенные методы расчета оптических приборов, поскольку края линз в оправе представляют собой препятствия на пути распространения света. При этом выделяют два важных частных случая. Один из них – такое расположение препятствия относительно точки наблюдения, при котором волны от вторичных источников приходят в нее под разными углами и преодолевают пути, различающиеся на несколько длин волн. Это так называемая **дифракция Френеля**, или **дифракция в ближней зоне**, когда точка наблюдения близка к препятствию.

Количественный критерий того, что дифракция вблизи оси отверстия заметно выражено состоит в следующем: радиус центральной зоны Френеля

¹³Для плоской волны параметр $s = x\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$, где x и b – расстояния, определяющие положение элемента волновой поверхности относительно точки наблюдения P .

должен превышать размеры препятствия r

$$(234) \quad \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda \geq r.$$

Отношение радиуса центральной зоны Френеля к линейному размеру препятствия называют **волновым параметром**

$$(235) \quad p = \frac{\sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda}{r}.$$

Дифракция Френеля выражена отчетливо, если $p \gtrsim 1$, и дифракция практически отсутствует, если $p \ll 1$.

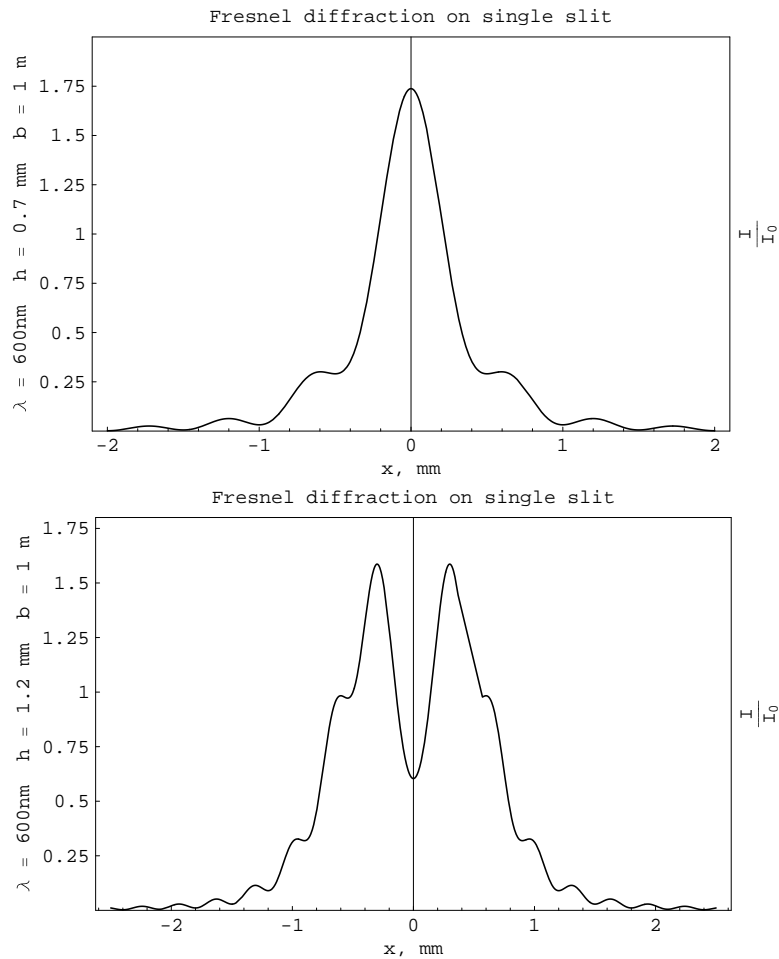


Рис. 32: Распределение интенсивности при дифракции Френеля на узкой длинной щели. Обозначения: h — ширина щели, b — расстояние от щели до экрана, λ — длина волны света, освещающего щель.

10.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. С помощью спирали Корню проанализируйте дифракцию на узкой бесконечно длинной щели. Докажите, что дифракционная картина представляет собой либо светлую, либо относительно темную центральную полосу, по обе стороны которой симметрично располагаются чередующиеся светлые и темные полосы, см. рис. 32.
2. Плоская монохроматическая волна падает нормально на длинную прямоугольную щель, за которой на расстоянии $b = 60$ см находится проекционный экран. Сначала ширину щели установили такой, что в середине дифракционной картины на экране наблюдался наиболее глубокий минимум. Раздвинув после этого щель на $\Delta h = 0.70$ мм, получили в центре картины следующий минимум. Найдите длину волны света.
3. Плоская световая волна длины $\lambda = 600$ нм падает нормально на непрозрачную длинную полосу ширины $h = 0.70$ мм. За ней на расстоянии $b = 1$ м находится проекционный экран. Найти с помощью рис. 28 отношение интенсивностей света в середине дифракционной картины и на краях геометрической тени.
4. Можно ли в принципе наблюдать дифракцию на препятствиях порядка метра. Какие условия необходимо создать, чтобы поставить такой опыт? Опишите схему такого мысленного опыта.

11 Лекция №11 "Дифракция Фраунгофера на прямоугольной щели"

*Постановка задачи. Область дифракции Фраунгофера.
Расчет распределения интенсивности.*

Явления дифракции можно классифицировать в зависимости от расстояний между источником, проекционным экраном и препятствием, на котором дифрагирует свет. Если эти расстояния очень велики, дифракция будет происходить в параллельных лучах и называться **дифракцией Фраунгофера**. В противоположном случае говорят о дифракции в непараллельных лучах, или дифракции Френеля. Этот тип дифракции анализируется (в зависимости от задачи) с помощью спирали Френеля и спирали Корню.

Между дифракцией Френеля и Фраунгофера нет принципиального различия. *Область дифракции Френеля расположена вблизи препятствия, и простирается до расстояний, с которых дифракцию можно рассматривать как фраунгоферову.* В строгом смысле дифракция Фраунгофера имеет место на бесконечно больших расстояниях. Этот вид дифракции изучается отдельно в связи с тем, что дифракция такого рода часто встречается в разнообразных оптических приборах, например на диафрагме объектива фотоаппарата.

Цель настоящей лекции — установить область дифракции Фраунгофера и рассчитать распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на прямоугольной щели.

11.1 Постановка задачи

Плоскую волну можно получить, располагая точечный источник света в фокусе собирающей линзы. Получающийся пучок параллельного света способен дифрагировать на каком-либо препятствии. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы, установленной на пути распространения дифрагированного света.

Пусть прямоугольная щель $a \times d$ освещается параллельным пучком монохроматического света, падающих нормально к плоскости отверстия. Схема опыта изображена на рис. 33. Требуется найти: 1) форму и размер изображения отверстия на экране, удаленном на расстояние b от щели, если плоскость экрана параллельна плоскости отверстия; 2) распределение интенсивности, получающееся в результате дифракции в плоскости экрана. Щель можно считать длинной, если ее высота a много меньше ее длины d . Если $d \approx 100a$, то щель рассматривается как бесконечно длинная.

Введем в *плоскости вторичных источников* (плоскость щели) и *плоскости дифракционной картины* (плоскость наблюдения) две прямоугольные системы координат с осями, параллельными сторонам щели: система $X'Y'$ с началом в точке O' (центр щели) и система XU с началом в точке O (центр проекционного экрана), $O'O = b$. Координаты точки P обозначим через x и y . Будем предполагать, что расстояние от препятствия до экрана намного превышает линейные размеры щели

$$(236) \quad \frac{a}{b} \ll 1, \quad \frac{d}{b} \ll 1.$$

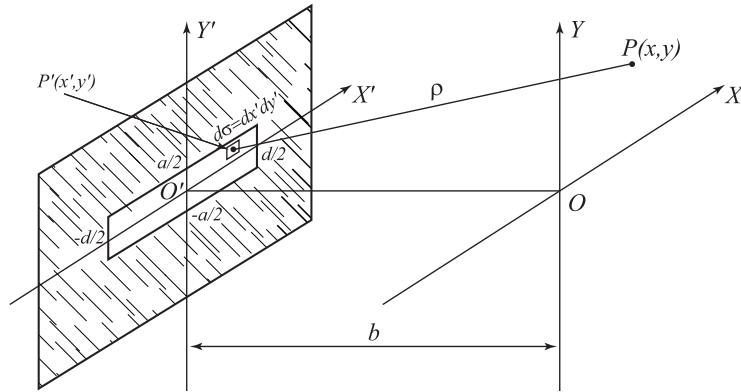


Рис. 33: Иллюстрация к расчету дифракции на прямоугольной щели.

Кроме этого нас будет интересовать дифракция в центральной части экрана, т. е. для малых углов дифракции.

Дифракция возникает в результате интерференции вторичных источников света, расположенных в площади щели. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля напряженность поля волны, дифрагированной на щели, представляется некоторым интегралом по площади Σ щели. Амплитуду плоской волны на площади щели Σ постоянная и равна

$$(237) \quad E_{P'}(x', y') = E_0.$$

Пусть $d\sigma = dx'dy'$ — элемент поверхности, образованный вокруг центра $P'(x', y')$; ρ — расстояние между P' и точкой наблюдения P . Световое поле в этой точке найдется по формуле

$$(238) \quad E_P(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' E_{P'}(x', y') \frac{e^{ik\rho}}{\rho},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и интегрирование ведется по открытой части волнового фронта плоской поверхности Σ . Согласно геометрии рис. 33

$$(239) \quad \rho = \sqrt{b^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Для аналитического вычисления интеграла (238) учтем, что дифракция имеет место для малых углов относительно направления $O'O$. Математически это условие формулируется так

$$(240) \quad \frac{|x - x'|}{b} \ll 1, \quad \frac{|y - y'|}{b} \ll 1.$$

Отсюда найдем с точностью величин, содержащих квадраты $x - x'$ и $y - y'$

$$(241) \quad \rho \cong b + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2b}$$

Тогда

$$(242) \quad E_P(x, y) = E_0 \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikb}}{b} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2b}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{ik \frac{x'^2+y'^2}{2b}} e^{-ik \frac{xx'+yy'}{b}}.$$

Эта формула пригодна для описания дифракции в приближении Френеля. При выполнении определенных условий мы можем дополнительно упростить эту формулу и перейти к дифракции Фраунгофера.

11.2 Область дифракции Фраунгофера

Таким образом, мы свели задачу к определению напряженности световой волны в плоскости дифракционной картины из формулы (242). Постоянные слагаемые, которые появились перед интегралом не будут влиять на распределение интенсивности света в плоскости экрана. Действительно, если обозначить через $I_0 = E_0^2$ интенсивность падающего на щель света, то относительное распределение интенсивности в дифракционной картине будет определяться выражением

$$(243) \quad \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\lambda^2 b^2} \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{ik \frac{x'^2+y'^2}{2b}} e^{-ik \frac{xx'+yy'}{b}} \right|.$$

Далее, необходимо выполнить анализ подинтегрального выражения в формуле (242), которое содержит как квадратичные, так и линейные слагаемые по x' и y' . Квадратичные слагаемые в экспоненциальном множителе $e^{ik \frac{x'^2+y'^2}{2b}}$ значительно усложняют вычисление этого интеграла. Однако условие (236) позволяет сделать некоторые качественные оценки того, когда этим квадратичным слагаемым можно будет пренебречь. Для этого сделаем оценку максимального значения, которое принимает интересующий нас множитель

$$(244) \quad k \frac{x'^2 + y'^2}{2b} \leq k \frac{a^2 + d^2}{8b} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{a^2 + d^2}{4b}.$$

Если выполняется дополнительное условие

$$(245) \quad \frac{\pi}{\lambda} \frac{a^2 + d^2}{4b} \leq \frac{\pi}{4},$$

то для очень узкой щели ($a \rightarrow 0$) найдем, что

$$(246) \quad \frac{d^2}{b\lambda} \leq 1, \quad \text{или} \quad b \geq b_{\min} = \frac{d^2}{\lambda}.$$

Условие (246) гарантирует, что экспоненциальный множитель с квадратами x' и y' не будет сильно изменяться в пределах интегрирования по длине щели. Следовательно его можно заменить единицей. В данном случае мы

будем говорить о дифракции в параллельных лучах, или дифракции Фраунгофера,

$$(247) \quad \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\lambda^2 b^2} \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{-ik \frac{xx'+yy'}{b}} \right|.$$

Все это значит, что

область дифракции Фраунгофера простирается от бесконечности до некоторого минимального расстояния $b_{\min} = \frac{d^2}{\lambda}$, которое, при заданной длине щели, задает ширину первой зоны Шустера $h_1 = \sqrt{b_{\min} \lambda}$.

В свою очередь это значит, что если в площади щели укладывается небольшая часть первой зоны Шустера, то дифракция будет фраунгоферовской (колебания в плоскости щели совершаются и приходят в точку наблюдения практически в фазе). Если условие (246) для данной геометрии дифракционного опыта не выполняется, то дифракция будет френелевской, поскольку в этом случае в щели будет целиком укладываться первая зона Шустера или несколько первых зон.

Принимая во внимание, что в чистом виде дифракция Фраунгофера осуществляется лишь при $b \rightarrow \infty$, можно сделать вывод о том, что она действительно является дифракцией в параллельных лучах. Поэтому ее проще наблюдать, в фокальной плоскости собирающей линзы, расположенной между препятствием и экраном.

11.3 Расчет распределения интенсивности

Теперь нетрудно найти распределение интенсивности света, получающееся в результате дифракции в плоскости экрана. Дифракционный интеграл (248) запишем в виде произведения двух интегралов

$$(248) \quad E_P(x, y) \sim \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' e^{ik \frac{yy'}{b}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{ik \frac{xx'}{b}}.$$

Тогда

$$(249) \quad \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{-ik \frac{xx'}{b}} = 2 \frac{\sin \frac{2\pi x}{\lambda} \alpha}{\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha}, \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' e^{-ik \frac{yy'}{b}} = 2 \frac{\sin \frac{2\pi y}{\lambda} \beta}{\frac{2\pi y}{\lambda} \beta}$$

где $\alpha = \frac{d}{2b}$ и $\beta = \frac{a}{2b}$ – малые углы, под которыми из точки O видна половина каждой стороны прямоугольной щели. Окончательно, интенсивность

дифрагировавшего света определяется выражением

$$(250) \quad I_P = \frac{a^2 d^2}{\lambda^2 b^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha\right)}{\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} \beta\right)}{\frac{2\pi y}{\lambda} \beta} \right]^2.$$

На рис. 34 изображен график функции $y = (\sin x/x)^2$. Главный максимум $y = 1$ при $x = 0$. Минимумы при $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$. Минимумы разделяют вторичные максимумы, положение которых определяется корнями трансцендентного уравнения $\tan x = x$. Эти корни асимптотически приближаются к значениям $x = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, где m – целое число.

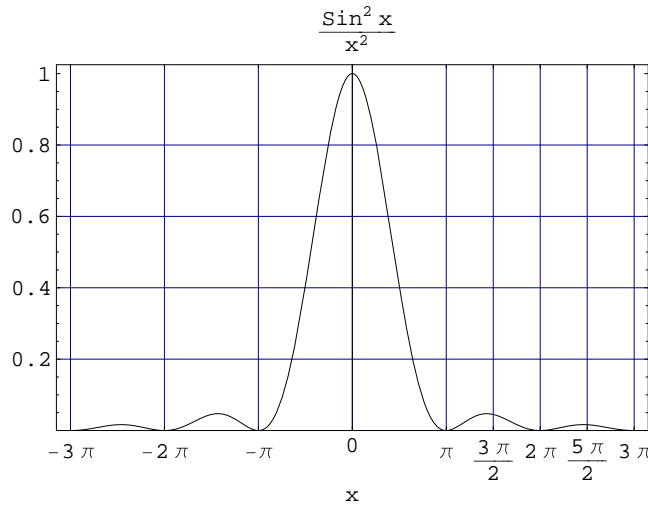


Рис. 34: График функции $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$.

Ясно, что интенсивность света обращается в нуль вдоль двух семейств линий, параллельных сторонам прямоугольной щели. Координаты этих линий

$$(251) \quad x = \pm u \frac{\lambda}{2\alpha}, \quad y = \pm v \frac{\lambda}{2\beta} \quad (u, v = 1, 2, 3, \dots)$$

Расстояния между двумя соседними минимумами, а также от центра центрального максимума до первого минимума равны

$$(252) \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}, \quad \Delta y = \frac{\lambda}{2\beta}.$$

Внутри каждого прямоугольника, образованного парами последовательных темных линий, интенсивность света достигает максимума. Однако интенсивность очень быстро убывает при удалении от центра дифракционной картины (для квадратного отверстия)

$$(253) \quad I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : I_4 : I_5 \dots = 1 : 0.047 : 0.017 : 0.008 : 0.005 \dots$$

Таким образом практически вся энергия дифрагировавшей световой волны сосредоточена в центральном светлом прямоугольнике со сторонами $\frac{\lambda}{2\alpha} \times \frac{\lambda}{2\beta}$,

см. рис. 35. Опыт также показывает, что чем больше щель, тем меньше эффективный размер дифракционной картины.

При увеличении одного из размеров щели период чередования дифракционных полос, перпендикулярных длинной стороне, уменьшается. При $a \ll d$ этот период становится очень малым. В дифракционной картине остаются полосы, параллельные длинной стороне щели, образующие дифракционную картину от щели, см. рис. 36.

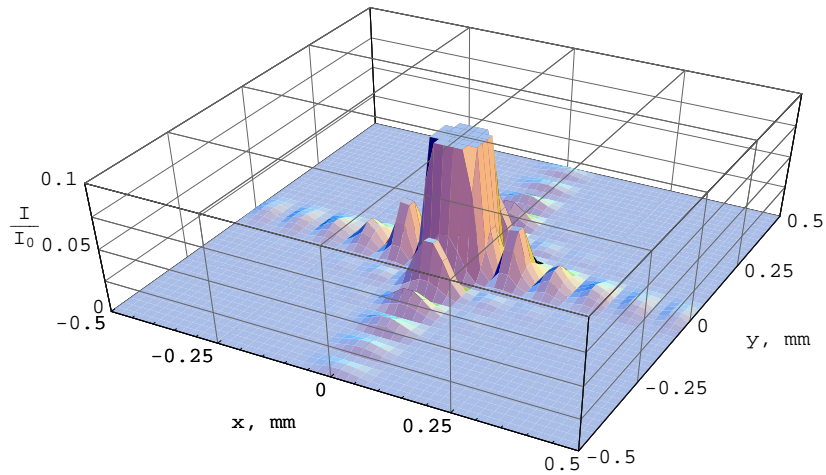


Рис. 35: Распределение интенсивности света дифракционной картины Фраунгофера от прямоугольного отверстия $7 \text{ мм} \times 7 \text{ мм}$ в монохроматическом свете $\lambda = 600 \text{ нм}$. Расстояние от плоскости щели до плоскости экрана $b = 1 \text{ м}$. Для того чтобы показать существование вторичных максимумов, центральный максимум не изображен выше плоскости $\frac{I}{I_0} = 0.1$, где

$$I_0 = \frac{a^2 b^2}{\lambda^2 b^2}.$$

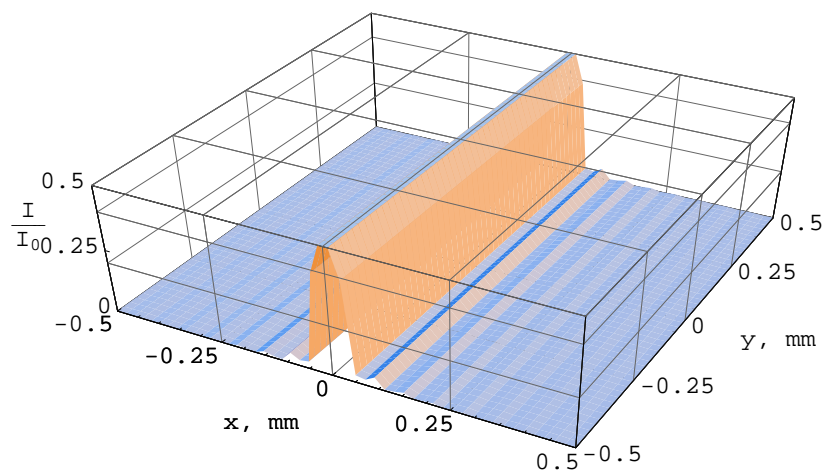


Рис. 36: Распределение интенсивности света дифракционной картины Фраунгофера от узкой щели $0.01 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$ в монохроматическом свете $\lambda = 600 \text{ нм}$. Расстояние от плоскости щели до плоскости экрана $b = 1 \text{ м}$.

11.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Объясните почему при наблюдении дифракции Фраунгофера в фокальной плоскости собирающей линзы, она не вносит дополнительной разности хода лучей от вторичных источников?
2. Найти первые пять максимумов функции $y = (\sin x/x)^2$ и значение функции в этих максимумах.
3. Квадратное отверстие со стороной $d = 2$ см освещается параллельным пучком солнечных лучей, падающих нормально к плоскости отверстия. Найти форму и размер изображения отверстия на экране, удаленном на 50 см от него, если плоскость экрана параллельна плоскости отверстия. Границей освещенности на экране считайте положение первого дифракционного минимума наиболее сильно отклоняемых лучей. Видимый спектр $\lambda = 7000\text{--}4000 \text{ \AA}$.

12 Лекция №12 "Дифракционная решетка"

Расчет распределения интенсивности. Условие максимумов и минимумов. Угловая дисперсия и разрешающая способность решетки.

Дифракционная решетка (ДР) — спектральный прибор, представляющий собой совокупность большого числа регулярно расположенных штрихов (канавок, щелей или выступов), нанесенных на плоскую или вогнутую оптическую поверхность. ДР используется в спектральных приборах как элемент для пространственного разложения ЭМ излучения в спектр¹⁴. Наилучшими спектральными качествами обладают **отражательные дифракционные решетки**. Они представляют собой зеркальную (металлическую) поверхность, на которую нанесены параллельные штрихи. Фронт световой волны разбивается штрихами ДР на отдельные когерентные пучки, которые *претерпев дифракцию на штрихах, интерферируют*. Результирующая интерференционная картина образуется в отраженном от решетки свете. В современных решетках число линий на 1 мм может достигать 2000–3000. В **прозрачных дифракционных решетках** штрихи нанесены на прозрачную (стеклянную) поверхность, и интерференционная картина наблюдается в проходящем свете.

Если ширина прозрачных щелей (или отражательных полос) a , а ширина непрозрачных промежутков (или рассеивающих свет полос) b , то величина $d = a + b$ называется **периодом (или шагом) решетки**.

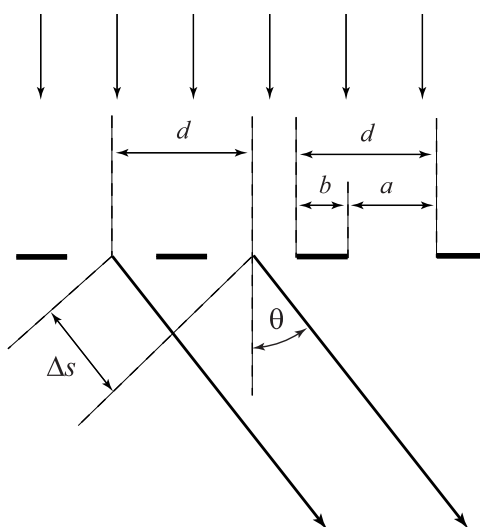


Рис. 37: Схема, иллюстрирующая принцип действия плоской щелевой дифракционной решетки.

¹⁴Принцип дифракции был открыт в 1785 г. американским астрономом Дэвидом Риттенхаусом (1732–1796). Он обнаружил, что пропуская белый свет через решетку, можно получить его спектр. В отличие от призмы решетка дает не один, а несколько спектров.

12.1 Расчет распределения интенсивности

Наша первая задача — найти угловое распределение интенсивности света при френгоферовой дифракции на решетке из N щелей и с периодом d при условии, что лучи монохроматического света с длиной волны λ падают на решетку нормально, а ширина щели равна a .

Опишем действие прозрачной щелевой решетки. Так как требуется рассчитать распределение интенсивности света в случае дифракции Френгофера на решетке, то можно считать, что экран, на котором наблюдается дифракционная картина, отодвинут на достаточно большое расстояние от решетки. Когерентные световые пучки, приходящие от N щелей решетки, можно считать параллельными. Выберем точку наблюдения на экране. Лучи, дифрагированные на решетке, образуют угол θ с нормалью к решетке, см. рис. 37. Вследствие того, что между когерентными параллельными пучками, идущими под углом от соседних щелей, существует разность хода $\Delta s = d \sin \theta$ и соответственно разность фаз $\alpha = 2\pi d \sin \theta / \lambda$. На векторной диаграмме колебание, приходящее в точку наблюдения от какой-либо щели решетки, изобразим вектором определенной длины a . Совокупный вклад нескольких щелей изображается ломанной линией с равными звеньями и равными углами α . Результирующее колебание изображается геометрической суммой этих векторов. Сложение векторов на плоскости формально тождественно сложению комплексных чисел $a \exp(i\alpha)$

$$(254) \quad A = a[1 + \exp(i\alpha) + \exp(2i\alpha) + \dots + \exp((N-1)i\alpha)] = a \frac{1 - \exp(Ni\alpha)}{1 - \exp(i\alpha)},$$

где колебание, возбужденное волнами, пришедшими от первой щели решетки, обозначено комплексным числом a .

Квадрат модуля комплексного числа A дает относительную интенсивность света в рассматриваемой точке экрана

$$(255) \quad I = |A|^2 = AA^* = |a|^2 \frac{2 - \exp(Ni\alpha) - \exp(-Ni\alpha)}{2 - \exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)} = |a|^2 \frac{1 - \cos(N\alpha)}{1 - \cos \alpha}.$$

Далее воспользуемся результатом лекции №10 для интенсивности дифрагированного света узкой длинной щели

$$(256) \quad |a|^2 = I_0 \left[\frac{\sin u}{u} \right]^2, \quad u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta,$$

где I_0 — интенсивность света в направлении вперед.

Используя формулы (255) и (256), мы получим выражение для распределения интенсивности света дифракционной картины для данной решетки в зависимости от угла θ

$$(257) \quad I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin u}{u} \right]^2 \left[\frac{\sin Nv}{v} \right]^2, \quad v = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta.$$

Эта формула показывает, что дифракционная картина есть результат модуляции дифракцией от отдельных щелей (множитель $\frac{\sin^2 u}{u^2}$) многолучевой интерференцией волн (множитель $\frac{\sin^2 Nv}{v^2}$), дифрагированных на N щелях в направлении, определяемом углом θ .

12.2 Условие максимумов и минимумов

Исследуем полученное выражение (257) на максимумы и минимумы, исходя из причин их возникновения.

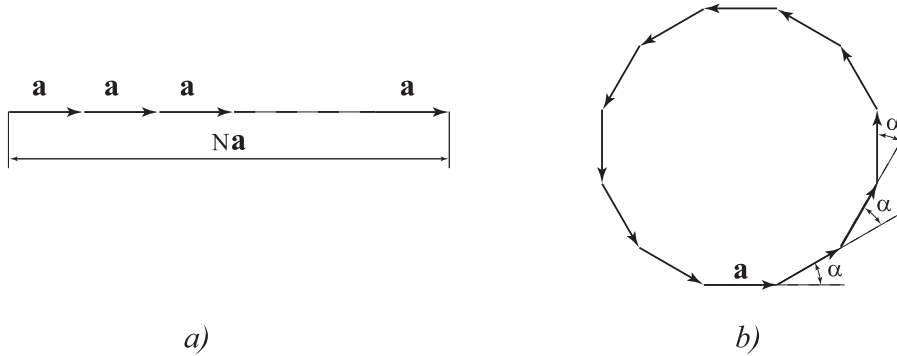


Рис. 38: Сложение комплексных амплитуд, приводящее *a)* к образованию главных дифракционных максимумов; *b)* дифракционных минимумов (на рисунке изображен случай для $N = 12$ векторов \mathbf{a} , разность фаз между которыми равна $\alpha = \frac{360^\circ}{N} = 30^\circ$).

1. **Условие главных максимумов интенсивности.** Главные максимумы возникают за счет интерференции световых волн от щелей решетки. Волны идущие от N щелей решетки будут усиливать друг друга, если в точке наблюдения они приходят с одинаковой фазой.

Действительно, волны от двух соседних щелей будут усиливать друг друга в точке наблюдения, если

$$(258) \quad d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где m называют **порядком интерференции**. Поскольку это соотношение выполняется попарно для всех соседних щелей, то оно и будет условием главных максимумов. Пучки света, относящиеся к различным значениям m называют **порядками спектра**, а создаваемые ими изображения входной щели — **спектральными линиями**. Все порядки, соответствующие положительным и отрицательным значениям m , симметричны относительно нулевого. По мере возрастания числа щелей ДР спектральные линии становятся более узкими и резкими. Действительно, легко убедиться в том, что интенсивность света в главных максимумах превышает в N^2 раз интенсивность света от одной щели в том же направлении.

2. **Условие дифракционных минимумов.** На своих местах также остаются и первичные минимумы, характерные для одной щели

$$(259) \quad a \sin \theta = n\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Однако появляются дифракционные минимумы, которые появляются за счет взаимной компенсации волн от всех N щелей. Положение этих

минимумов определяется из условия, что разности фаз колебаний от отдельных щелей равны $\frac{2\pi}{N}$. Векторы, изображающие эти колебания, имеют равные амплитуды и повернуты друг относительно друга на угол $\frac{2\pi}{N}$. Они образуют замкнутую ломанную линию, см. рис. 38, *b*. Следовательно, разность хода между различными световыми пучками должна быть равна

$$(260) \quad \frac{\lambda}{N}, \quad 2\frac{\lambda}{N}, \quad 3\frac{\lambda}{N}, \quad \dots, \quad \frac{N-1}{N}\lambda.$$

Углы, определяющие направления на дополнительные минимумы, находятся из условия

$$(261) \quad d \sin \theta = \frac{k}{N}\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

Обратите внимание, что $k \neq 0, N, 2N, \dots$, так как тогда условие минимумов трансформируется в условие главных максимумов. Таким образом, формула (261) показывает, что главный максимум возникает при $n = mN$, а соседний минимум — при $n = mN + 1$.

3. **Условие добавочных максимумов.** Между двумя главными максимумами дифракционной картины находятся $N - 1$ добавочных минимумов, которые разделяют $N - 2$ вторичных максимумов, интенсивность света в которых очень слаба. Они создают равномерный слабый фон в дифракционной картине, на которой резко очерчены главные максимумы.

На рис. 40, 1–3 приведены зависимости распределения интенсивности от угла дифракции θ для многолучевой интерференции, дифракции от одной щели и результирующее распределение интенсивности при дифракции от $N = 6$ щелей. Увеличение числа щелей не меняет положения главных максимумов, но делает их более интенсивными. Распределение интенсивности между максимумами зависит от соотношения периода решетки и ширины щели.

Так как положение главных максимумов (кроме центрального, соответствующего $\theta = 0$) зависит от длины волны света, падающего на решетку, то решетка разлагает белый свет ($\lambda = 380 \div 760$ нм) в спектр. Чем больше длина волны, тем дальше располагается от центрального максимума тот или иной максимум, соответствующий этой длине волны. Таким образом дифракционная решетка в каждом порядке спектра m разложит белый свет в спектр, в котором монохроматические составляющие (различные цвета) будут разделены в пространстве. Перекрытие соседних спектров наступает тогда, когда

$$(262) \quad m\lambda = m'\lambda'.$$

Ясно, что длинноволновая граница спектра первого порядка совпадает с началом коротковолновой границы спектра второго порядка. Следовательно, спектры второго и третьего порядка будут накладываться друг на друга.

12.3 Спектроскопические характеристики решетки

Основными спектроскопическими характеристиками ДР являются **разрешающая способность, угловая дисперсия и область дисперсии**. Эти величины не зависят от формы штриха, а определяются только периодичностью их расположения и их числом.

12.3.1 Разрешающая способность

Пусть на решетку падает некогерентное излучение. Рассмотрим случай излучения, в котором выделяется две спектральные линии равной интенсивности с длиной волны λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Каждая волна создает свою дифракционную картину. Если спектральные линии очень близки друг к другу, то дифракционные картины пространственно не разделены. Разрешающую способность дифракционной решетки принято рассчитывать в соответствии с **критерием Релея**: спектральные линии считаются пространственно разрешенными, если максимум интенсивности одной попадает на минимум другой.

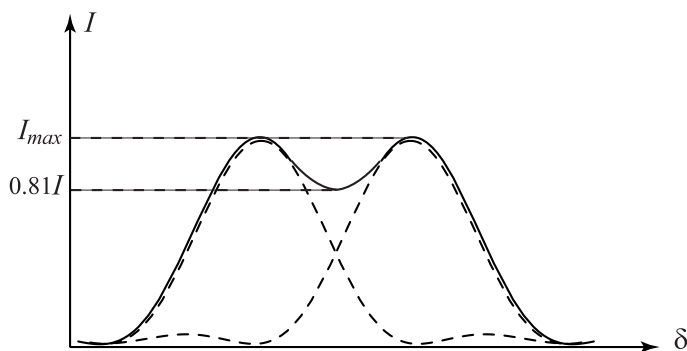


Рис. 39: Иллюстрация к критерию Релея. Согласно критерию эти две спектральные линии одинаковой интенсивности (распределение интенсивности монохроматического света $I(\delta) = I_{\max} \left[\frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} \right]^2$) разрешаются. Отношение результирующей интенсивности в минимуме к интенсивности спектральной линии в максимуме равно $\frac{8}{\pi^2} = 0.811$.

Рассмотрим главный максимум m -го порядка и соседний с ним минимум

$$(263) \quad d \sin \theta_{\max} = m(\lambda + \Delta\lambda), \quad d \sin \theta_{\min} = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

Согласно критерию Релея

$$(264) \quad \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Разрешающая способность решетки определяется следующим образом

$$(265) \quad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N|m|.$$

Если ширину решетки определить как $L = Nd$, а порядок m -го спектра порядка выразить через $m = d \sin \theta / \lambda$, то разрешающая способность может быть представлена в следующей форме

$$(266) \quad R = \frac{L}{\lambda} \sin \theta,$$

Эта формула означает, что разрешающая способность решетки равна числу длин волн, укладываемых в разности хода лучей, дифрагированных в направлении θ от двух крайних точек ДР (разделенных расстоянием $L = Nd$). Так как количество щелей очень велико, то разрешающая способность дифракционной решетки большая. Для повышения разрешающей способности необходимо переходить к большим значениям порядкам m спектра. Максимальный порядок ограничен углом отклонения $\theta \leq \pi/2$. Поэтому максимальная разрешающая способность равна

$$(267) \quad R_{\max} = \frac{L}{\lambda}.$$

Таким образом, максимальная разрешающая способность зависит от полного числа и не зависит от того, как на каждом периоде решетки распределены ее прозрачная и непрозрачная части. При заданных углах разрешающая способность может быть повышена только за счет L . Лучшие решетки имеют до 15 см ширины и содержат 100 000 периодов.

Однако, высокая разрешающая способность не всегда является единственным важным критерием в спектроскопических исследованиях. Например, если на решетку падает свет достаточно низкой интенсивности (свет от далеко удаленных от Земли звезд или галактик), то важно, чтобы как можно больше света было дифрагировано в определенный порядок спектра. Поэтому для проведения высокоточных измерений длин волн в спектре излучения необходимо взять дифракционную решетку хорошей угловой дисперсией.

12.3.2 Угловая дисперсия и область дисперсии

Угловая дисперсия характеризует степень пространственного (углового) разделения световых лучей с разной длиной волны. При работе с заданным порядком спектра m угловая дисперсия равна

$$(268) \quad \frac{\Delta \theta}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{m}{d}.$$

Численно эта величина равна угловому смещению дифракционного максимума при изменении длины волны на единицу.

Таким образом, у решетки с меньшим периодом угловая дисперсия в данном порядке выше. Это очень важный факт, так как при меньших m интенсивность дифрагированного света в максимумах значительно больше, а спектральная область — шире. Этот недостаток устраняется при использовании отражательных ДР, называемых **эшеллетами**. За счет выбора формы штрихов (штрихам ДР придают треугольную несимметричную форму) до 80% отраженного света можно собрать в один или два ненулевых порядках интерференции (по одну сторону от центрального максимума).

Используя условие главных максимумов, легко показать, что угловая дисперсия не зависит от параметров решетки, а зависит только от угла дифракции θ , возрастая с увеличением θ (за исключением прозрачной щелевой решетки),

$$(269) \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{\tan\theta}{\lambda}$$

Если спектральные линии спектров соседних порядков перекрываются, то дифракционная решетка, используемая в качестве спектрального аппарата, становится непригодной для исследования соответствующего участка спектра. Максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, который наблюдать без наложения, называется **областью дисперсии**.

Если λ обозначает минимальную длину волны спектрального интервала, то из условия совпадения максимумов соседних порядков

$$(270) \quad d \sin\theta = (m+1)\lambda \quad d \sin\theta = m(\lambda + \Delta\lambda),$$

найдем ширину области дисперсии

$$(271) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Ясно, что при заданной длине волны ширина область дисперсии определяется только рассматриваемым порядком спектра: чем выше порядок, тем уже область.

12.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Оцените ширину одной щели, если известно, что на 1 мм поверхности дифракционной решетки укладывается 300 линий.
2. Описать характер спектров дифракционной решетки, если ее постоянная d равна 1) удвоенной, 2) утроенной, 3) учетверенной ширине щели a .
3. Какой максимальный порядок спектра может наблюдаться при дифракции света с длиной волны λ на решетке с периодом d ?
4. Найти условие главного дифракционного максимума при наклонном падении лучей на решетку (угол падения θ_0). Какой вид примет это условие, если $d \gg \lambda$, а порядок спектра $m \ll d/\lambda$?
5. Оцените дисперсионную область дифракционной решетки в спектре первого и второго порядков, если на нее падает белый свет.
6. Определите общее количество штрихов, которые должна иметь ДР, чтобы пространственно разделить две спектральные линии с $\Delta\lambda = 10^{-1} \text{ \AA}$ в центре видимой области спектра.

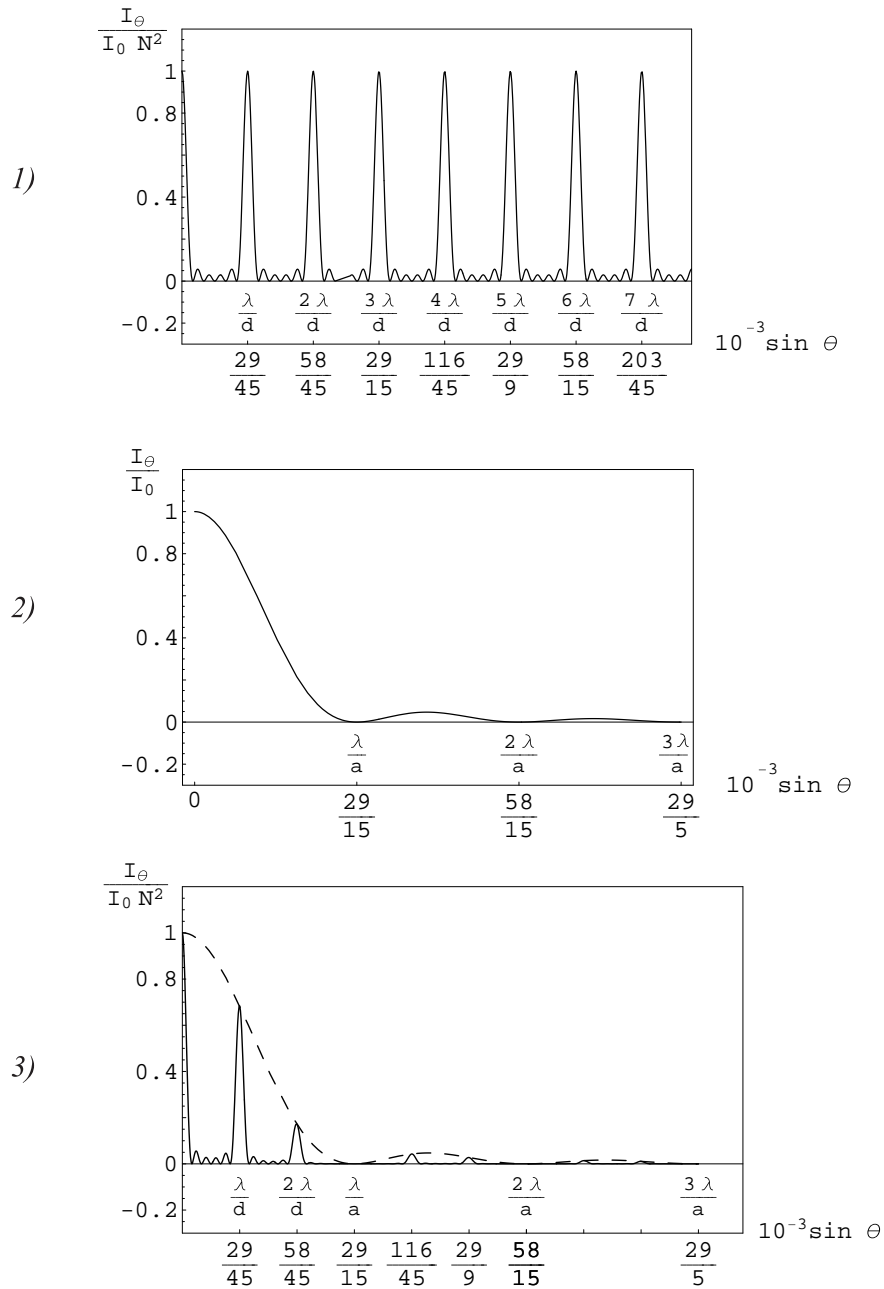


Рис. 40: 1) Распределение интенсивности в результате **многолучевой интерференции** от $N = 6$ щелей. На рисунке изображена нормированная функция $\frac{\sin(N\pi d \sin \theta/\lambda)^2}{N\pi d \sin \theta/\lambda}$; 2) Нормированное распределение интенсивности при **дифракции от одной щели**. На рисунке изображена функция $\frac{\sin(\pi a \sin \theta/\lambda)^2}{\pi a \sin \theta/\lambda}$; 3) Распределение интенсивности при дифракции на $N = 6$ щелях. Длина волны света $\lambda = 580$ нм, $a = 300$ нм, $d = 3a$.

13 Лекция №13 "Металлооптика"

Уравнения Максвелла в проводящей среде. Глубина проникновения, фазовая скорость и длина волны. Микроскопическая теория оптических свойств металлов.

Металлооптика — раздел физики, в котором изучается взаимодействие металлов с ЭМ волнами оптического диапазона.

В инфракрасной и видимой области оптического диапазона металлы отражают падающее излучение (характерный металлический блеск). Это явление объясняется преимущественным рассеянием света при его взаимодействии со свободными электронами. Их концентрация достигает в металлах $N_e \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Электроны в процессе взаимодействия излучают вторичные волны, которые при сложении образуют отраженную волну высокой интенсивности. Формирование из рассеянного света отраженной волне происходит в тонком поверхностном *скин-слое* толщиной $\ll 1 \text{ мкм}$, в котором излучение, проникающее в металл экспоненциально затухает.

При взаимодействии ЭМ излучения с металлами роль свободных электронов является определяющей особенно для волн радиодиапазона и инфракрасной области спектра. Поэтому оптические и электрические свойства металлов оказываются взаимосвязаны: чем выше статическая проводимость металла, тем сильнее он отражает свет.

Ультрафиолетовый свет и излучения с более короткими длинами волн начинает взаимодействовать с электронами внутренних оболочек атомов. По своим оптическим свойствам металлы приближаются к диэлектрикам. Так в рентгеновской области спектра оптические свойства металлов определяются внутренними электронами, и металлы не отличаются от диэлектриков.

Оптические свойства металлов связаны с величиной их электрической проводимости $\sigma(\omega)$, зависящей от частоты. В рамках классической электродинамики оптические свойства однородных изотропных металлов принято выражать через *комплексную диэлектрическую проницаемость*, или, соответственно, *комплексный показатель преломления*. Мнимая часть этих величин характеризует степень затухания ЭМ волн в металле.

13.1 Уравнения Максвелла в проводящей среде

Металлы, как и большинство кристаллических твердых тел в природе, представляют собой поликристаллические образования, т. е. агрегаты мелких монокристаллов различной ориентации. Так как зерна ориентированы хаотично и их размеры чрезвычайно малы по сравнению с размеров поликристалла, то металлический образец можно рассматривать как изотропную среду. Поэтому рассмотрим макроскопически однородную изотропную среду с диэлектрической проницаемостью ε (эта величина не измеряется непосредственно), магнитной проницаемостью μ и электрической проводи-

мостью σ^{15} . Материальные уравнения

$$(272) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \end{aligned}$$

необходимо дополнить законом Ома в дифференциальной форме

$$(273) \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Тогда уравнения Максвелла можно записать в следующей форме

$$(274) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

По сравнению с диэлектриками в правую часть первого уравнения Максвелла добавляется слагаемое с током $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Низкочастотной области спектра ток (это будет *ток проводимости*) обусловлен движением *свободных электронов*. В инфракрасной области спектра в движение вовлекаются *атомные ядра* кристаллической решетки, так как в этой области спектра находятся резонансные частоты их колебаний. В видимой и ультрафиолетовой областях в колебания вовлекаются *связанные электроны* металла. Смещение связанных электронов вызывает *поляризацию металлов* и появляется *ток поляризации*. Ток проводимости вызывает поглощение ЭМ волн, т. е. превращение ЭМ энергии в *джоулево тепло* (это учитывается введением σ), а ток поляризации — нет.

Однако, в высокочастотных ЭМ полях между движением свободных и связанных электронов нет существенной разницы. Поэтому при описании оптических свойств металлов ток проводимости не связывают с движением только свободных, а ток поляризации — только со связанными электронами.

Докажем, что если на поверхность металла падает ЭМ излучение, то $\operatorname{div} \mathbf{E} \simeq 0$. Вычисляя дивергенцию от обеих частей первого уравнения Максвелла, получим

$$(275) \quad -\frac{\varepsilon}{c} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho.$$

Дифференцируя третье уравнение Максвелла по времени также найдем, что

$$(276) \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \dot{\rho}.$$

Исключая $\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}$ с помощью этих уравнений, получим

$$(277) \quad \dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{c} \rho = 0.$$

¹⁵Для большинства металлов электропроводность равна по порядку величины $10^{17} \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$.

Интегрирование этого уравнения дает

$$(278) \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \text{где} \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}.$$

Это уравнение показывает, что плотность распределения заряда в металле экспоненциально уменьшается с течением времени. Характерное время затухания определяется **временем релаксации** τ , которое по порядку величины равно 10^{-18} с. Это значение намного меньше, чем период колебания ЭМ волны в оптическом диапазоне. Следовательно, можно считать, что в металле $\rho \cong 0$ и

$$(279) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} \simeq 0$$

Далее, исключая \mathbf{H} с помощью этого условия из первых двух уравнений Максвелла, найдем волновые уравнения для напряженности \mathbf{E}

$$(280) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\mathbf{E}}.$$

Так, если волна монохроматическая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, то уравнения (280) принимает следующий вид

$$(281) \quad \nabla^2 \mathbf{E} + \hat{k}^2 \mathbf{E} = 0,$$

где \hat{k}^2 квадрат волнового числа равен

$$(282) \quad \hat{k}^2 = \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right).$$

Эти уравнения формально совпадают с соответствующими уравнениями для непроводящей среде, если ввести **комплексную диэлектрическую проницаемость**

$$(283) \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

Тогда

$$(284) \quad \hat{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n},$$

где $\hat{n} = \sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}$ — **комплексный показатель преломления**. Если положить¹⁶

$$(285) \quad \hat{n} = n + i\kappa,$$

где n — **показатель преломления** и κ — **показатель поглощения**. Эти две величины могут быть выражены через материальные константы ε , μ и σ следующим образом

$$(286) \quad \begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= \mu\varepsilon, \\ n\kappa &= \frac{2\pi\mu\sigma}{\omega} = \frac{\mu\sigma}{\nu}. \end{aligned}$$

¹⁶ $\hat{k} = k + i s.$

Решение системы (286) удобно представить в виде

$$(287) \quad \begin{aligned} n^2 &= \frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2\nu^2}} + 1 \right], \\ \kappa^2 &= \frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2\nu^2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Так как для видимого диапазона $\frac{2\sigma}{\varepsilon\nu} \gg 1$, то формула для коэффициента поглощения значительно упрощается

$$(288) \quad \kappa = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\nu}}.$$

13.2 Глубина проникновения, фазовая скорость и длина волны

При распространении в электропроводящей среде плоской ЭМ волны (вдоль оси X) векторы напряженности могут быть представлены в следующем виде

$$(289) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \hat{k}x)} = \mathbf{E}_0 e^{-sx} e^{-i(\omega t - kx)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{-i(\omega t - \hat{k}x)} = \mathbf{H}_0 e^{-sx} e^{-i(\omega t - kx)}, \end{aligned}$$

где $\hat{k} = k + is$. Эти формулы показывают, что амплитуда ЭМ волна в металле экспоненциально затухает по мере ее проникновения вглубь проводящей среды. При этом глубина проникновения равна

$$(290) \quad h = \frac{1}{2s} = \frac{c}{2\omega\kappa} = \frac{\lambda}{4\pi\kappa}.$$

Глубина проникновения для металлов намного меньше чем длины волны ЭМ излучения, падающего его металла. Например, в оптическом диапазоне

$$(291) \quad h \sim \frac{\lambda_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\nu}{\mu\sigma}} \ll \lambda_0,$$

где $\lambda_0 = n\lambda$ – длина волны в вакууме. Таким образом, говорить о распространении света в проводнике нет никакого смысла.

Выражение для фазовой скорости ЭМ волны в проводнике имеет вид

$$(292) \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \left[\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2\nu^2}} + 1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Эта формула показывает, что 1) наличие в среде проводимости уменьшает фазовую скорость света по сравнению с фазовой скоростью света в диэлектрике с теми же значениями ε, μ ; 2) скорость света в проводнике зависит от частоты, т. е. распространение монохроматических ЭМ волн в среде со слабой проводимостью наблюдается *дисперсия*.

13.3 Микроскопическая теория оптических свойств металлов

В отсутствие внешнего ЭМ поля, свободные электроны двигаясь хаотическим образом, не создают макроскопического тока. В случае, когда металл находится во внешнем ЭМ поле, электроны проводимости приобретают дополнительную скорость, **скорость дрейфа**, и их движение становится более упорядоченным, несмотря на то, что электроны взаимодействуют с ионами кристаллической решетки. Это упорядоченное движение электронного газа порождает электрический ток, индуцированный ЭМ полем.

Не усложняя деталями физический процесс, можно считать, что уравнение движения электрона проводимости имеет вид

$$(293) \quad m\ddot{\mathbf{r}} + m\beta\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

где m — эффективная масса электрона, e — его заряд и β — частота электронных столкновений (коэффициент затухания).

Для того чтобы выяснить физический смысл β в уравнении (293), рассмотрим движение электрона, когда поля нет $\mathbf{E} = 0$. В этом случае уравнение движения принимает следующий вид

$$(294) \quad \ddot{\mathbf{r}} + \beta\dot{\mathbf{r}} = 0$$

и его решение

$$(295) \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \frac{1}{\beta}\mathbf{v}_0e^{-\beta t}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0e^{-\beta t}.$$

Ясно, что величина обратная β определяет **время затухания**, или **время релаксации**, $\tau \equiv \frac{1}{\beta}$. Типичные для металлов значения составляют $\beta = (2-50) \times 10^{13} \text{ с}^{-1}$.

Если опять предположить, что внешнее поле монохроматическое $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0e^{-i\omega t}$, то решение уравнения (293) имеет вид

$$(296) \quad \mathbf{r} = -\frac{e}{m(\omega^2 + i\beta\omega)}\mathbf{E}.$$

В данном случае движение электронов проводимости имеет периодический характер, порождающее переменный электрический ток. Плотность электрического тока равна

$$(297) \quad \mathbf{j} = N_e e \dot{\mathbf{r}} = \frac{N_e e^2}{m(\beta - i\omega)}\mathbf{E}.$$

Тогда электропроводность равна

$$(298) \quad \sigma = \frac{N_e e^2}{m(\beta - i\omega)} = \frac{N_e e^2 \beta}{m(\beta^2 + \omega^2)} + i \frac{N_e e^2 \omega}{m(\beta^2 + \omega^2)}.$$

Эта формула показывает, что когда $\omega \ll \beta$, электропроводность σ приближается к электростатическому значению $\sigma_0 = N_e e^2 / (m\beta)$, т. е. становится

вещественной. С другой стороны, когда $\omega \gg \beta$ (это случай волн оптического диапазона), мнимая часть σ превосходит вещественную часть. Поэтому ясно, что разделение вещественной и мнимой части диэлектрической проницаемости, которое ведет к формулам (286) и (287) оправдано лишь для волн $\omega \ll \beta$.

Зависимость комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и комплексного показателя преломления \hat{n} , согласно формуле (283), обусловлена не только зависимостью $\sigma(\omega)$ (*вклад электронов проводимости*), но и зависимостью $\varepsilon(\omega)$ (*вклад связанных электронов*).

Однако в инфракрасной и видимой области спектра вклад связанных электронов металла становится пренебрежимо малым. Тогда, полагая $\varepsilon = 1$, найдем

$$(299) \quad \hat{\varepsilon} \equiv \hat{n}^2 = 1 - \frac{4\pi N_e e^2}{m} \frac{1}{\omega(\omega - i\beta)}.$$

Отсюда

$$(300) \quad \operatorname{Re} \hat{\varepsilon} \equiv n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{4\pi N_e e^2}{m(\omega^2 + \beta^2)},$$

$$(301) \quad \operatorname{Im} \hat{\varepsilon} \equiv n\kappa = \frac{2\pi N_e e^2}{\beta\omega m(\omega^2 + \beta^2)}.$$

Критическое значение частоты, при котором реальная часть $\hat{\varepsilon}$ меняет знак

$$(302) \quad \omega_{\text{п}}^2 = \frac{4\pi N_e e^2}{m} - \beta^2,$$

называется **плазменной частотой свободных электронов**. Типичные для металлов значения составляют $(5-20) \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$. В терминах плазменной частоты мы можем записать

$$(303) \quad \operatorname{Re} \hat{\varepsilon} = 1 - \frac{\omega_{\text{п}}^2 + \beta^2}{\omega^2 + \beta^2},$$

$$(304) \quad \operatorname{Im} \hat{\varepsilon} = \frac{\beta(\omega_{\text{п}}^2 + \beta^2)}{2\omega(\omega^2 + \beta^2)}.$$

Так как $\omega_{\text{п}}^2 \gg \beta^2$, то

$$(305) \quad \omega_{\text{п}}^2 \simeq \frac{4\pi N_e e^2}{m}.$$

Если рассмотреть случай достаточно высоких частот $\omega^2 \gg \beta^2$, то

$$(306) \quad \operatorname{Re} \hat{\varepsilon} \simeq 1 - \left(\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega}\right)^2,$$

$$(307) \quad \operatorname{Im} \hat{\varepsilon} \simeq \frac{\beta}{2\omega} \left(\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega}\right)^2.$$

Из полученных формул следует, что в области частот $\beta < \omega \ll \omega_{\text{п}}$, охватывающей для хорошо отражающих металлов ближний и средний инфракрасный диапазон ($\lambda \sim 1-10 \text{ мкм}$), реальная часть $\hat{\varepsilon}$ становится отрицательной

и $\kappa > 1$ ¹⁷. Для достаточно низких ω , коэффициент затухания κ становится намного больше единицы и, следовательно, коэффициент отражения стремится к единице.

С другой стороны, при $\beta \ll \omega > \omega_{\text{п}}$, реальная часть $\hat{\epsilon}$ положительная и $\kappa < 1$. Поэтому для достаточно больших частот ω падающего на металл излучения, коэффициент затухания κ становится намного меньше единицы и мнимая часть $\hat{\epsilon}$ во много раз меньше реальной части. Это означает, что металл реагирует на внешнее ЭМ излучение как диэлектрик.

Щелочные металлы ведут себя именно так, как описано выше. В инфракрасной области диапазона они непрозрачны и обладают высокой отражательной способностью. При некоторых критических частотах видимого и ультрафиолетового света они становятся прозрачными, имея достаточно низкую поглощательную способность. Это объясняется тем, что в металле возбуждаются плазменные колебания свободных электронов, которые приводят к появлению области прозрачности при $\omega \approx \omega_{\text{п}}$.

13.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Какими физическими факторами обусловлено уменьшение длины ЭМ волны в проводнике по сравнению с длиной волны в диэлектрике?
2. Оцените отношение $\frac{\sigma}{\nu}$ в формуле (291) в инфракрасной области частот.

¹⁷То, что реальная часть $\hat{\epsilon}$ меньше нуля означает, что разность фаз между колебанием внешнего электрического поля и электронов проводимости равна $\frac{\pi}{4}$ радиан.

14 Лекция №14 "Дисперсия и абсорбция света"

Основы электронной теории дисперсии. Законы поглощения света.

Дисперсия света — явление зависимости показателя преломления вещества n от частоты ν (длины волны λ) света. Следствием дисперсии света, например, является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его сквозь стеклянную призму; разложение солнечного света в спектр в радуге. Первые экспериментальные исследования дисперсии света, принадлежащие Ньютону (1672 г.), были выполнены по способу преломления в призме. Измеряя показатель преломления для различных длин волн (цветов), можно исследовать дисперсионную способность вещества призмы, т. е. функцию $n = n(\nu)$. Для веществ прозрачных в данной области спектра, n увеличивается с увеличением ν (уменьшением λ), чему и соответствует распределение цветов в спектре (фиолетовые лучи преломляются больше, чем красные) — **нормальная дисперсия света**. Вблизи полос поглощения вещества зависимость n от λ имеет более сложный характер. Даже общий ход дисперсии — увеличение показателя преломления при уменьшении длины волны света — не всегда имеет место. Так, Леру (1862 г.), наблюдая преломление в призме, наполненной парами йода, впервые обнаружил, что фиолетовые лучи преломляются меньше, чем красные, а другие лучи поглощаются йодом и не доступны для наблюдения. Эту особенность Леру назвал **аномальной дисперсией** — уменьшение n с уменьшением λ .

Дальнейшие систематические исследования показали, что явление аномальной дисперсии связано с поглощением света. У всякого вещества имеются свои полосы поглощения, и общий ход показателя преломления обусловлен распределением этих полос по спектру.

14.1 Основы электронной теории дисперсии

Важнейшим выводом теории Максвелла явилось положение, согласно которому скорость распространения монохроматической ЭМ волны связана с константами диэлектрика, в которой поле распространяется

$$(308) \quad v = \frac{c}{n}, \quad \text{где} \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

В диэлектрике скорость ЭМ волн зависит от частоты. Влияние дисперсии проявляется в распространении немонохроматических волн, поскольку различные частоты, составляющие волну, распространяются с различной скоростью. Объяснение дисперсии света дается электронной теорией вещества, позволяющей дать молекулярное толкование параметрам ε и μ и объяснить влияние частоты ЭМ поля на ε , и, следовательно, на n .

Дисперсия является следствием зависимости поляризации атомов от частоты. Простейшая классическая модель неподвижного атома — электрон, колеблющийся около положения равновесия по гармоническому закону. Под влиянием переменного электрического поля световой волны

$$(309) \quad E = E_0 e^{-i\omega t}$$

электрон дополнительно смещаются относительно положения равновесия на расстояние x , поляризуя атом. Дипольный момент атома, направленный вдоль поля равен

$$(310) \quad p_e = q_e x.$$

Если концентрация испытывающих поляризацию атомов равна N , то поляризация среды будет равна

$$(311) \quad P = N p_e = N q_e x.$$

Зная электрическую поляризацию среды, можно вычислить ее диэлектрическую проницаемость: $\varepsilon(\omega) = D/(\varepsilon_0 E) = (\varepsilon_0 E + P)/(\varepsilon_0 E)$. Таким образом,

$$(312) \quad \varepsilon = 1 + \frac{N_e q_e x}{\varepsilon_0 E},$$

где смещение x определяется величиной напряженности электрического поля волны E .

14.1.1 Уравнение колебаний оптического электрона

Задача сводится к определению смещения электрона под действием внешнего, периодически меняющегося с течением времени поля при учете сил, действующих на электрон атома, т. е. представляет собой задачу о вынужденных колебаниях электронов.

Однако, электрон, приведенный в колебание, постепенно отдает свою энергию, и, следовательно, колебания его будут затухающими. Не обсуждая физических причин, обуславливающих затухание колебаний в атоме, сила сопротивления должна иметь вид

$$(313) \quad F = -m_e \gamma \frac{dx}{dt} = -m_e \gamma \dot{x},$$

где $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ — масса электрона, γ — коэффициент затухания

$$(314) \quad \gamma = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{q_e^2 \omega_0^2}{m_e c^3}.$$

Здесь ω_0 — круговая частота колебаний электрона, имеющая для оптической области спектра излучения порядок 10^{15}с^{-1} . По порядку величины $\gamma \sim 10^8 \text{с}^{-1}$, поэтому для оптических частот выполняется условие малости затухания

$$(315) \quad \gamma \ll \omega_0.$$

Если пренебречь влиянием окружающих молекул, также поляризованных проходящей через вещество ЭМ волной, действие ее на электрон определяется напряженностью электрического поля

$$(316) \quad F = q_e E.$$

Это допущение справедливо для разреженных газов, где среднее расстоянием между частицами велико. Для плотных газов, для жидкостей или

твердых тел необходимо учитывать это влияние, что приведет к изменению силы (316).

Итак, уравнение вынужденных колебаний электрона с учетом затухания имеет следующий вид

$$(317) \quad m_e \ddot{x} + m_e \omega_0^2 x + m_e \gamma \dot{x} = q_e E,$$

где предполагается, что напряженность E направлена вдоль оси X .

В установившемся режиме $x(t)$ является гармонической функцией с той же частотой, что и электрической поле

$$(318) \quad x(t) = x_0 e^{-i\omega t}.$$

Отсюда найдем, что

$$(319) \quad x = \frac{q_e}{m_e} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}.$$

Поэтому зависящая от частоты и изменяющаяся с течением времени поляризация равна

$$(320) \quad P = \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

14.1.2 Электронная и ионная дисперсия

Уравнение (317) обеспечивает полное решение задачи и дает как зависимость показателя преломления n от длины волны λ , так и абсорбцию вблизи собственных частот поглощения, вводимую формально при помощи коэффициента затухания γ . Далее следует ввести комплексную диэлектрическую проницаемость и комплексный показатель преломления

$$(321) \quad \hat{n} = n - i\kappa,$$

где n — действительная часть, определяющая фазовую скорость волны, а κ — коэффициент поглощения, характеризующий затухание волны.

Из написанных выше формул получим, что

$$(322) \quad n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$

$$2n\kappa = \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Поскольку γ очень мала в оптической области, за исключением частот $\omega \approx \omega_0$, можно считать, что $\kappa(\omega) \approx 0$, а

$$(323) \quad n(\omega)^2 = 1 + \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Если кроме электронов с собственной частотой ω_0 имеются электроны с другими частотами, то формулу (323) следует записать так

$$(324) \quad n(\omega)^2 = 1 + \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

где N_i — концентрация электронов в диэлектрике, собственная частота которых равна ω_{0i} .

К формуле (324) можно добавить дополнительное слагаемое, учитывающее колебания ионов. Ввиду их большой массы ионов частоты их собственных колебаний значительно меньше частот собственных колебаний легких электронов. Собственные колебания ионов лежат в далекой инфракрасной области, не оказывая, таким образом, влияние на дисперсию в оптической области спектра. Влиянием ионов объясняется различие статической диэлектрической проницаемости от ее значения в оптической области спектра. Например для воды $\sqrt{\varepsilon(0)} \simeq 9$, а для оптических частот $\sqrt{\varepsilon(\omega)} \simeq 1.33$. При учете колебания ионов в правой части (324) при $\omega \rightarrow 0$ появляются слагаемые, имеющие большие числовые значения,

$$(325) \quad \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 M_j} \frac{N_j}{\omega_{0j}^2},$$

где M_j — масса иона, ω_{0j} — собственная частота колебания иона (маленькая величина) и N_j — их концентрация.

14.1.3 Область нормальной дисперсии

Для разреженных газов (реальный газ при низком давлении) показатель преломления близок к единице, поэтому

$$(326) \quad n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \simeq 2(n - 1).$$

Формула (324) упрощается (без учета затухания)

$$(327) \quad n(\omega) \simeq 1 + \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}.$$

График этой функции называется **дисперсионной кривой**. Для малых частот $\omega \ll \omega_0$ получаем статическое значение диэлектрической проницаемости

$$(328) \quad n(0) = \sqrt{\varepsilon} = 1 + \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2}.$$

Для больших частот $\omega \gg \omega_0$ показатель преломления стремится к единице

$$(329) \quad n(\omega) = 1 - \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2} \sum_i N_i.$$

Эта формула показывает, что для высоко-частотного диапазона характер связи электронов в атомах не играет роли. Показатель преломления в этой области спектра зависит лишь от полного числа колеблющихся электронов в единице объема.

14.1.4 Область аномальной дисперсии

С учетом малости затухания мы можем записать следующие формулы

$$(330) \quad n = 1 + \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} N \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$
$$\kappa = \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} N \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Получается, что вблизи резонансной частоты $\omega_0 = \omega$ показатель преломления уменьшается с увеличением частоты. Это явление называется **аномальной дисперсией**. Так как резонансные частоты свободных атомов принадлежат ультрафиолетовой области спектра, показатель преломления в видимой области спектра всегда больше единицы.

Для того, чтобы получить количественное совпадение с опытом, в классической теории приходится вводить для каждой линии поглощения эмпирические константы. Оказывается, что N_i в формулах (322) допустимо считать пропорциональным плотности или числу атомов N_0 в единице объема

$$(331) \quad N_i = f_i N_0,$$

где безразмерный коэффициент f_i называют **силой осциллятора**, учитывающий долю участия осцилляторов или их эффективность в явлении дисперсии.

Качественные результаты классической теории подтверждаются квантовой. Кроме этого квантовая теория делает возможным связать силы осцилляторов с другими характеристиками электронных оболочек атомов, а именно волновыми функциями электронов в разных энергетических состояниях).

14.2 Законы поглощения света

Прохождение света через вещество ведет к возникновению колебаний электронов среды под действием ЭМ поля волны. Это сопровождается потерей энергии последней, затрачиваемой на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия вновь возвращается первичному излучению в виде вторичных волн, излучаемых электронами. Частично энергия может переходить и в другие формы энергии. Таким образом, интенсивность света, проходящего через вещество, уменьшается.

14.2.1 Закон Бугера

Основным законом, описывающим поглощение света, является закон П. Бугера (открыт экспериментально в 1729 г.)

$$(332) \quad I = I_0 e^{-\alpha l},$$

где I_0 — интенсивность волны, вступающей в вещество, l — толщина слоя вещества и α — коэффициент поглощения, не зависящий от интенсивности

I_0 , но зависящий от длины волны. Эта закономерность показывает, что интенсивности света падает в геометрической прогрессии, когда толщина слоя нарастает в арифметической прогрессии. Физический смысл (его установил И. Ламберт в 1760 г.) этого закона состоит в том, что показатель поглощения не зависит от интенсивности света, а следовательно, и от толщины поглощающего слоя: при прохождении любого слоя вещества интенсивность светового пучка уменьшается на определенную долю, зависящую только от α и толщины слоя

$$(333) \quad \frac{dI}{I} = -\alpha dl.$$

Решение этого уравнения и является закон Бугера.

Зависимость $\alpha(\lambda)$ называют *спектром поглощения вещества*. Спектр поглощения изолированных атомов, например разреженных газов, имеет вид узких линий: α отличен от нуля только в определенных узких диапазонах длин волн (десятые–сотые доли Å), соответствующих частотам собственных колебаний электронов внутри атомов. Молекулярный спектр поглощения состоит из существенно более широких областей длин волн, в которых поглощение значительно. Ширина полос молекулярного поглощения равна единицы–тысячи Å. Поглощение твердых тел характеризуется очень широкими областями (тысячи–десятки тысяч Å) с большим значением κ .

В терминах квантовой теории процесс поглощения света связан с переходом электронов в поглощающих атомах, ионах, молекулах или твердом теле с более низких энергетических уровней на более высокие

$$(334) \quad \nu = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

В какой вид энергии переходит энергия поглощенного света определяется способом обратного перехода электрона в основное или нижнее возбужденное состояние: с излучение фотона или без излучательно, или комбинированным путем.

С.И. Вавилов установил, что закон Бугера выполняется в крайне широких пределах изменения интенсивности света (примерно 10^{20} раз). Однако для ряда веществ в световых пучках очень большой интенсивности поглощение света перестает подчиняться закону Бугера: коэффициент поглощения становится функцией $\kappa(I_0)$. Происходит *нелинейное поглощение света*. Это явление обусловлено тем, что очень большая доля поглощающих атомов, перейдя в возбужденное состояние могут оставаться в нем сравнительно долго (больше, чем 10^{-8} с). Выбрав специальные вещества со значительно большим временем возбужденного состояния, Вавилов наблюдал, что при достаточно большой интенсивности света κ уменьшается. Это объясняется тем, что заметная часть молекул пребывает в возбужденном состоянии и теряет возможность поглощать свет.

14.2.2 Закон Бугера–Ламберта–Бера

Во многих случаях имеет место поглощение света молекулами газов или молекулами вещества, растворенного в практически непоглощающем растворителе. Оказывается, что коэффициент поглощения пропорционален концентрации C поглощающих молекул (правило Бера)

$$(335) \quad \alpha(\lambda) = A(\lambda)C$$

где $A(\lambda)$ – новый коэффициент, не зависящий от концентрации и характерный для молекулы поглощающего вещества. Тогда закон поглощения примет вид

$$(336) \quad I = I_0 e^{-A(\lambda)Cl}$$

Физический смысл этого закона Бугера–Лабмерга–Бера (336) состоит в том, что поглощающая способность молекулы не зависит от влияния окружающих молекул. Этот закон надо рассматривать как правило со многими исключениями, особенно при значительном увеличении концентрации, т. е. при значительном уменьшении взаимного расстояния между молекулами поглощающего вещества.

Введенный выше коэффициент поглощения γ , характеризующий затухание колебаний электрона в атоме, объясняет явление абсорбции экспоненциальным убыванием амплитуды волны, распространяющейся в поглощающей среде

$$(337) \quad E = E_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0} \kappa l}.$$

Ясно, что эта формула эквивалентна закону Бугера, и, следовательно, коэффициент поглощения должен быть равен

$$(338) \quad \alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa.$$

14.3 Вопросы для самостоятельной работы

1. Выведите формулу (322).
2. Какие изменения, учитывающие действия окружающих молекул среды, необходимо внести в формулы (322)?

15 Экзаменационные вопросы

1. **Электромагнитные волны** (Система уравнений Максвелла. Волновое уравнение и скорость света. Плоские волны. Фазовая скорость. Вопросы для самостоятельной работы.).
2. **Отражение и преломление света** (Вывод законов отражения и преломления света. Явление полного отражения света.).
3. **Формулы Френеля** (Вывод формул. Анализ формул Френеля.).
4. **Энергия и интенсивность света** (Закон сохранения энергии для ЭМ поля. Интенсивность света. Коэффициенты отражения и пропускания.).
5. **Интерференция монохроматического света** (Определение интерференции. Интерференция монохроматических волн. Когерентность света. Интерференция, осуществляемая делением волнового фронта.).
6. **Пространственная когерентность** (Введение. Расчет видности. Критерий пространственной когерентности.).
7. **Интерференция квазимонохроматического света** (Интерференция, осуществляемая делением амплитуды. Время и длина когерентности. Квазимонохроматический свет. Условие временной когерентности.).
8. **Принцип Гюйгенса–Френеля** (Формулировка принципа. Вычисление амплитуды волны. Примеры.).
9. **Дифракция Френеля круглом отверстии** (Спираль Френеля. Дифракция на круглом отверстии. Зонная пластинка.).
10. **Дифракция Френеля на прямолинейном крае** (Зоны Шустера и спираль Корню. Дифракция на прямолинейном крае. Условие наблюдения дифракции Френеля.).
11. **Дифракция Фраунгофера на прямоугольной щели** (Постановка задачи. Область дифракции Фраунгофера. Расчет распределения интенсивности.).
12. **Дифракционная решетка** (Расчет распределения интенсивности. Условие максимумов и минимумов. Угловая дисперсия и разрешающая способность решетки.).
13. **Металлооптика** (Уравнения Максвелла в проводящей среде. Глубина проникновения, фазовая скорость и длина волны. Микроскопическая теория оптических свойств металлов.).
14. **Дисперсия и абсорбция света** (Основы электронной теории дисперсии. Законы поглощения света.).

16 Список литературы

Список литературы

- [1] А.Н. Матвеев, Оптика, М. "Высшая школа", 1985.
- [2] Д.В. Сивухин, Общий курс физики, т. IV "Оптика", М. "Наука", 1980.
- [3] И.В. Савельев, Курс общей физики, М. "Наука", 1987.
- [4] Р. Фейнман, Р. Лейтон и М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, 3. Излучение. Волны. Кванты; 7. Физика сплошных сред, М. "Мир", 1977.
- [5] Ф. Крауфорд, Берклевский курс физики, т. III "Волны", М. "Наука", 1974.
- [6] Г.С. Ландсберг, Общий курс физики, Оптика, М. "Наука", 1976.
- [7] М. Борн и Э. Вулф, Оптика, М. "Наука", 19??.
- [8] Р.В. Поль, Оптика и атомная физика, М. "Наука", 1966.
- [9] Сборник задач по общему курсу физики под ред. В.А. Овчинкина, ч. 2, М. "Издательство МФТИ", 1998.
- [10] Энциклопедия для детей. Том. 16. Ч.1,2. Глав. ред. В.А. Володин. — М.: Аванта+, 2001.